PROGRAMACION LINEAL Y ORDENACION DE LA PRODUCCION

1. *El Plan de producción de la empresa*

Al programar la producción que habrá de realizar durante el próximo período, el empresario debe decidir qué tipos o clases de artículos, y en qué cantidades, producirá y, además, en qué momento del tiempo y por quién, secciones, máquinas u obreros, habrán de ser procesadas las anteriores cantidades, de forma tal que pueda obtener el máximo beneficio. Naturalmente, cuando la explotación tiene dimensiones considerables y la tecnología que utiliza es algo compleja, llega a ser extremadamente difícil hallar la solución óptima del anterior problema. Pero incluso cuando no se dan estas dos circunstancias anteriores, se suele a menudo pretender llegar al óptimo dividiendo el problema —que es único— en dos etapas: en la primera, ha de decidirse qué clase y cantidades de artículos hay que producir, mientras la segunda ha de permitir ordenar en el tiempo aquellas cantidades, indicando cuáles elementos, de los que componen la estructura productiva de la explotación, deben efectuar las oportunas transformaciones. Pero si esta división artificial puede justificarse por motivos de simplificación, no es siempre aceptable desde un punto de vista teórico, por las razones que más adelante serán expuestas.

Hasta épocas que pueden sin exageración ser calificadas de recientes, cada una de estas etapas, en que artificialmente se dividía el plan de producción, tan sólo podía ser resuelta echando mano del antiguo y conocido método de "prueba y error", "trial and error". Es cierto que existían algunos instrumentos, como los gráficos Gantt u otros similares, pero ninguno de ellos aportaba una solución analítica al problema que estudiaban, sino que tan sólo ayudaban a plantearlo, facilitando las operaciones necesarias en la aplicación del antedicho método. No tan sólo no podía garantizarse la obtención de la solución óptima, sino que tampoco podía indicarse la distancia del óptimo de la solución hallada.

La aparición del instrumental matemático englobado en el campo mal y poco definido de la Investigación operativa ha abierto finalmente la posibilidad de una solución analítica del problema, de forma tal que se cumpla el objetivo perseguido, dentro de las limitaciones impuestas por los datos con que se opera. Pero por ahora, este instrumental matemático, en lo que concierne al plan de producción de la empresa, está formado por dos clases de modelos: los denominados de "alocación de recursos", y los denominados modelos de secuencias o de ordenación de la producción. Esta clasificación permite por sí sola deducir que, a pesar de los adelantos logrados, aún es corriente mantener la artificial división en etapas del problema de la organización de la producción.

Los modelos de "alocación de recursos" resuelven, de forma analítica, la primera etapa: cantidades y clases de artículos que deben producirse. En general, y puesto que operamos sobre un período de tiempo dado, los métodos matemáticos que suelen utilizar estos modelos comúnmente son la Programación lineal y, en su caso, la cuadrática. Persiguen, y obtienen, siempre y cuando no se produzcan las circunstancias que más tarde se examinarán, la maximización del beneficio dentro de las restricciones impuestas por la existencia de factores fijos.

Los modelos de secuencias de operaciones o de ordenación de la producción, aunque por su mayor complejidad se encuentran hasta ahora en un estado más incipiente, y sus posibilidades de aplicación son más limitadas, resuelven, asimismo de forma analítica, la segunda etapa, pero una vez resuelta la primera. Es decir, determinan el orden en que deben ser producidas las diversas unidades de los artículos con el fin de minimizar el tiempo inactivo de las máquinas, o, lo que es equivalente, el tiempo total de funcionamiento, una vez conocidas las cantidades que deben producirse.

La contradicción entre ambos enfoques es evidente: los modelos de "alocación" consideran el tiempo como un dato, y las cantidades a producir como incógnitas, los modelos de secuencias consideran el tiempo como una incógnita y las cantidades a producir como datos. No sólo esto, sino que, como se verá más adelante, cuando en los modelos de "alocación" no se considera explícitamente el problema de la ordenación y no se introducen en consecuencia las restricciones pertinentes sobre los valores que pueden tomar las variables, nada garantiza que la solución hallada, en teoría la óptima, sea factible al distribuirla sobre el eje del tiempo real.

Desgraciadamente, no existe hasta ahora un modelo general que permita resolver simultáneamente ambas etapas de un mismo problema. La verdad es que tratar de resolverlas por separado, como si fueran independientes y sin ninguna conexión entre sí, no da demasiado buenos resultados.

2. *Clases de factores fijos en el modelo de la Programación lineal*

Los requisitos técnicos y económicos que debe reunir para su solución mediante la Programación lineal el problema de la "alocación" de los recursos fijos de la empresa son sobradamente conocidos: mercados de competencia perfecta, proporcionalidad de los costes variables de cada proceso, etc.

También es sobradamente conocido el esqueleto matemático de este método. Para establecer la notación vamos a exponerlo: se trata de maximizar (o minimizar) la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

cumpliéndose las siguientes m condiciones:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

y, además,

$$x_i \geq O \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

Cuando este método se aplica a la determinación del programa productivo óptimo de una empresa, los símbolos anteriores tienen los siguientes significados (1):

- n es el número de productos o, de forma general, de actividades o procesos productivos.
- m es el número de factores fijos (2) de que dispone la empresa. Más exactamente, es el número de clases de factores fijos.
- c_i es el beneficio bruto que se obtiene del proceso i cuando éste actúa a nivel unitario.
- a_{ij} es el "input" o coeficiente técnico, que señala la cantidad del factor fijo j necesaria para actuar el proceso i a nivel unitario.
- A_j es "la capacidad o disponibilidad del factor j" (3).
- x_i es el nivel, incógnito, a que debe actuarse el proceso i, o, en el caso más sencillo, número de unidades del artículo i que deben producirse.

Planteado así el problema, interesa centrar la atención en las A_j, que la literatura suele definir como "capacidad" del factor fijo j que la empresa tiene a su disposición o que puede utilizar, y asimismo en las a_{ij}, que se definen, por consiguiente, como la capacidad de factor fijo j absorbida por el proceso i cuando éste se actúa a nivel unitario. Un momento de reflexión permite deducir que los factores fijos que la empresa utiliza pueden clasificarse en los tres grupos siguientes:

a) Factores fijos perfectamente divisibles entre los procesos. Ello significa que todos los procesos pueden actuarse simultáneamente. Por ejemplo, una superficie de tierra cultivable, etc. ...

b) Factores fijos compuestos por un solo elemento indivisible entre los procesos. Por lo tanto, tan sólo se puede efectuar un proceso simul-

---

(1) Vid. M. J. Beckmann: *Lineare Planungsrechnung*, Fachverlag für Wirtschaftstheorie und Okonometrie, Ludwigshafen am Rhein, 1959. Pero con leves variantes, ésta suele ser la notación más utilizada, así como las definiciones de los símbolos.

(2) Generalmente, se suele dar una definición muy amplia de factor fijo en la Programación lineal, entendiendo todas aquellas circunstancias que pueden limitar los valores de las variables. En este ensayo, factor fijo tiene un sentido mucho más restringido.

(3) Esta es la definición que suele darse, aunque ya se verá que capacidad tiene diversos significados, que influyen sobre el problema estudiado.

áneamente. Por ejemplo, un alto horno, o una empresa que disponga de un solo torno o de un solo telar, etc. ...

c) Factores fijos compuestos por diversos elementos idénticos, cada uno de los cuales es indivisible entre los procesos. En cada uno de estos elementos tan sólo se puede efectuar un proceso simultáneamente, pero visto el factor fijo en su conjunto, existe la posibilidad teórica de efectuar a la vez tantos procesos como elementos idénticos lo compongan.

Naturalmente, así como la distinción entre la primera clase y las otras dos es sustancial, entre la segunda y la tercera existe una diferenciación meramente cuantitativa. Para una empresa que tan sólo dispone de un torno, este factor pertenece a la clase *b)*. Pero si dispone de una sección de tornos de idénticas características, esta sección en conjunto está incluída en la clase *c)*. Pero la anterior clasificación tiene importancia desde el punto de vista de la conexión existente entre las dos etapas en que se suele dividir el problema de la organización de la producción y la determinación del plan de producción óptimo. Cuando todos los factores fijos de una empresa pertenecen a la primera clase pierde importancia, e incluso se anula, la segunda etapa, que consiste en la ordenación temporal del programa productivo. De ahí que la solución obtenida con la aplicación del anterior modelo es siempre óptima y factible. Cuando todos los factores fijos de una empresa pertenecen a la clase segunda, el problema de la ordenación de la producción adquiere tremenda importancia, y la mera solución del anterior modelo, al no garantizar que la solución óptima —según él— sea factible, pierde validez. En el tercer caso, cuando todos los factores pertenecen al tipo c), tanto la primera como la segunda etapa tienen importancia, aunque ésta se distribuye desigualmente a medida que crece el número de elementos que componen el factor fijo.

En la práctica es posible que una empresa utilice o disponga de factores de los tres tipos. Aún así, la conclusión sigue siendo que no puede despreciarse el aspecto de la ordenación de la producción y creer que con la solución del modelo "standard" ya se han sorteado todos los obstáculos que se oponían a la obtención del máximo beneficio por parte de la empresa.

3. *Análisis de los tres casos puros*

3.1. *Todos los factores son divisibles*

Puesto que, como dice Salveson, el modelo típico, "standard", de la

Programación lineal aplicada a la producción de la empresa parece suponer "la producción simultánea y continua de todos los bienes considerados en una máquina durante cualquier período de tiempo y la producción simultánea y continua de los mismos bienes en máquinas distintas" (4), su más adecuada aplicación se logra cuando todos los factores fijos que la empresa utiliza pertenecen a la clase *a)*.

En este caso se cumplen siempre las hipótesis de simultaneidad y continuidad, cuando ésta se entiende en cuanto a la utilización (a_{ij} x_i) de los factores fijos, no a la obtención del producto.

Entonces, las A_j son expresadas en unidades físicas, como el ejemplo antes expuesto de una superficie de tierra cultivable, como igualmente ocurre con las a_{ij}, mientras que las x_i son expresadas en unidades físicas por unidad de tiempo o bien en unidades físicas absolutas, según si el producto se obtiene de forma continua o no. Por ejemplo, en las refinerías de petróleo, donde el producto es del tipo "continuous output" (5), producto continuo, éste se mide en unidades físicas por unidad de tiempo. En este caso, el horizonte temporal del plan no tiene importancia. Mientras permanezcan constantes las condiciones técnicas y los precios que intervienen en el modelo, será conveniente seguir produciendo las mismas cantidades de productos, manteniendo constante el programa productivo.

En cambio, cuando el producto es del tipo "point output", tiene importancia el período de tiempo sobre el que se extiende el plan de producción. Es éste el caso de la agricultura, donde entre el momento de la siembra y el de la cosecha ha de transcurrir un período de tiempo tecnológicamente constante (6). Si el horizonte temporal del plan coincide con el ciclo de cosecha o período de maduración, todos los procesos activos que intervienen con valor positivo en la solución óptima deberán ser forzosamente actuados simultáneamente. No existe problema de "sche-

---

(4) M. E. Salveson: *Mathematical Methods in Management Programming*, en Proceedings of the Conference on Operations Research in Production and Inventory Control, Case Institute of Technology. S. F., pág. 34.

(5) Vid. F. y V. Lutz: *The Theory of Investment of the Firm*, Princeton University Press, 1951.

(6) No es totalmente cierto, por cuanto en muchos cultivos, especialmente los forestales, el empresario tiene cierto margen de decisión sobre cuándo efectuar la cosecha.

duling" u ordenación temporal. Pero si el horizonte temporal es un múltiplo del ciclo de cosecha (lo cual no será frecuente, especialmente en los cultivos que tengan un ciclo relativamente largo, pues entonces el plan suele coincidir con un ciclo de cosecha), el problema de la ordenación temporal tiene mayor importancia. En teoría, se puede entonces dar la siguiente solución:

Maximizar

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \qquad (\sum_{t=1}^{T} x_{it})$$

cumpliéndose

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijt}\, x_{it} \leq A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m.\ t = 1, 2, \ldots T)$$

y

$$x_{it} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n.\ t = 1, 2, \ldots T)$$

pero ello equivale a maximizar, por separado,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_{it}$$

cumpliéndose

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijt}\, x_{it} \leq A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

y

$$x_{it} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

para cada t. Entonces, el programa productivo de cada ciclo de cosecha será idéntico, ya que las c_i y las a_{ij}, así como las A_j, son las mismas en cada uno de ellos. De ahí que este planteamiento no sea totalmente correcto a no ser que sea totalmente indiferente el orden temporal en que se haya de producir la cantidad $x_i = \sum_{t=1}^{T} x_{it}$ (7). Dada esta indiferencia, no tiene importancia ninguna el horizonte temporal del plan de producción. El programa óptimo que se halle, para uno o varios ciclos de cosecha será siempre factible, y el beneficio obtenido será el

(7) En realidad, si hiciésemos intervenir los costes de almacenamiento, ya no se produciría esta circunstancia.

máximo dentro de las limitaciones impuestas por las ecuaciones de condición.

3.2. *Todos los factores fijos están compuestos por un elemento único indivisible entre los procesos*

Puesto que cada factor fijo se compone de un solo elemento, y éste tan sólo puede dedicarse a fabricar un solo artículo a la vez, es evidente que las a_{ij} tan sólo pueden ser expresadas en unidades de tiempo. Más exactamente, a_{ij} es el tiempo necesario para procesar una unidad del artículo i en el factor fijo j. A_j es asimismo un tiempo. Si se supone que el elemento j puede estar en funcionamiento durante todo el período de tiempo T que abarca el plan de producción, A_j es entonces igual a T. Si T_f es menor que T (T_f es el tiempo de funcionamiento del factor fijo j, que es evidente que no puede ser mayor que T), A_j se convierte en T_f. Las x_i son unidades físicas; a diferencia de lo que ocurre en el caso anterior y a causa de las características de los factores fijos la producción de cada i no se realiza de forma continua durante todo el período. La mayoría de los tratados sobre estas cuestiones plantean entonces el problema de la forma siguiente:

Maximizar

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

cumpliéndose

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \leq T \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

y, además,

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

Para comprender las limitaciones de este modelo, puede partirse de un ejemplo muy sencillo. Así, una empresa que dispone de dos máquinas diferentes, una fresadora y una cepilladora. "Se trata de resolver el problema en cuanto al tiempo de una semana de 48 horas de trabajo" (8).

(8) J. CASTAÑEDA: *La dirección científica de las empresas,* En Curso de Conferencias sobre Cuestiones históricas y actuales de la Economía española. Bilbao, 1955-56. página 163.

Estas dos máquinas pueden realizar dos productos distintos, x_1 y x_2, cuyos beneficios brutos unitarios son 7 y 2 pesetas respectivamente. Los tiempos unitarios, o tiempos de fabricación en cada máquina, de cada unidad son:

	Máq. 1	Máq. 2
Prod. 1	2	3
Prod. 2	3/2	3/4

El problema queda planteado así:

Maximizar

$$7\,x_1 + 2\,x_2$$

cumpliéndose

$$2\,x_1 + 3/2\,x_2 \leq 48$$
$$3\,x_1 + 3/4\,x_2 \leq 48$$

y, naturalmente,

$$x_1\,,\ x_2 \geq 0$$

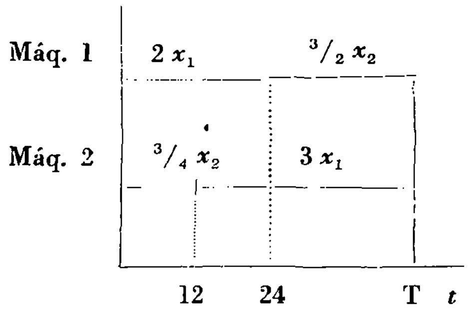
La solución óptima es así:

$$x_1 = 12$$
$$x_2 = 16$$

lo cual equivale a decir que el tiempo total en que cada máquina se dedicará a procesar cada uno de los dos artículos será:

	Máq. 1	Máq. 2
Prod. 1	24	36
Prod. 2	24	12
Total...	48	48

Con este programa, ninguna de las dos máquinas estará inactiva durante el período. Si ahora programamos en el tiempo, mediante un sencillo gráfico GANTT, esta solución óptima, se deduce rápidamente que ésta tan sólo será factible si se cumplen las dos condiciones siguientes:



1. El orden en que se han de procesar cada uno de los dos artículos en cada máquina es indiferente, o bien este orden es inverso: el producto 1 debe ser procesado en el orden opuesto del producto 2.

2. "A causa de la inspección, el manejo de los materiales, el control de las operaciones, el proceso de los datos u otros requisitos" (9), puede ser que sea antieconómico dividir los lotes de cada uno de los artículos que aparecen en el programa productivo óptimo de la empresa. En el gráfico anterior puede apreciarse que esta circunstancia no se cumple. El lote del artículo 1 debe fraccionarse y, a su vez, el lote del artículo 2 debe estar inactivo durante el período de tiempo $(2x_1 - 3/4\,x_2)$.

Ello significa que, cuando está presente una de estas dos condiciones o ambas, el modelo anterior nos proporcionará una solución óptima desde su punto de vista. Puede afirmarse que el modelo anterior está infracondicionado, ya que no se ha tenido en cuenta, en su planteamiento matemático, todas las condiciones que limitan el valor de las variables. Sin embargo, no es sencillo hallar y plantear las condiciones anteriores de forma matemática, especialmente cuando del sencillo ejemplo anterior pasamos a casos más complicados y realistas. Quien más pasos ha dado en este sentido ha sido SALVESON (10), pero no ha logrado aún resolver el problema general.

Si la única condición que existe, para la ordenación en el tiempo, es que los lotes no pueden ser fraccionados, es fácil incorporar al anterior modelo las condiciones que nos asegurarán que la solución hallada es a la vez óptima y factible. Puesto que T es el tiempo máximo en que los factores fijos pueden estar en funcionamiento, el tiempo total en que cada uno de los artículos pueden estar siendo transformados es asi-

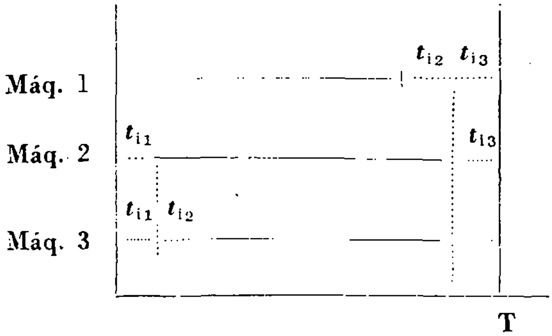
(9) M. E. SALVESON: *Op. cit.*, pág. 37.

(10) M. E. SALVESON: *Op. cit.*

mismo T. En el caso de un problema en que existen m factores fijos y n procesos activos, deben, pues, incorporarse al modelo "standard" las n ecuaciones de condición siguientes:

$$x_i \sum_{j=1}^{m} t_{ij} \leq T \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

Estas condiciones son terriblemente restrictivas. Pero, además, para muchos sectores industriales, especialmente los mecánicos, lo son en exceso. En estas industrias, donde la fabricación suele realizarse en unidades sueltas, por ejemplo, piezas, tornillos, engranajes, etc. una unidad de un determinado artículo no podrá ser procesada en un factor fijo hasta que haya sido transformada en el que le precede, precedencia que puede venir impuesta no por razones tecnológicas, sino organizativas. Ello equivale a decir que los lotes tan sólo pueden ser fraccionados en unidades enteras. Si se producen tornillos, y se decide producir x_1 de la clase 1, no tendría sentido fraccionar esta cantidad en tres grupos de x_{1r} ($r = 1, 2, 3$) unidades si estos x_{1r} fueran números fraccionarios. También es sencillo entonces especificar las condiciones matemáticas que deberían ser añadidas al modelo "standard" para que la solución fuera óptima y factible. El gráfico anterior, aplicable cuando son tres los factores fijos de la clase b, permite deducirlas. Serían para el proceso i ($i = 1, 2, \ldots n$)



$$(t_{i1} + t_{i2} + t_{i3})\, x_i + 2\,(t_{i1} + t_{i2} + t_{i3}) \leq 3\,T$$

En el caso más general de n procesos y m factores fijos, estas ecuaciones serían:

$$\sum_{j=1}^{m} t_{ij}\, x_i + (m-1) \sum_{j=1}^{m} t_{ij} \leq m\,T$$

Ahora bien, la solución óptima que con este planteamiento se obtiene tan sólo es factible si no existe restricción alguna sobre el orden tecnológico en que deben ser procesados los artículos, o bien si este orden tecnológico cumple condiciones muy especiales. Aun así, y como es lógico, al anterior modelo debería añadírsele otra restricción: la de que las incógnitas tan sólo pueden tomar valores enteros, caso de "integer programming", para cuya solución ya han aparecido diversos algoritmos como el de GOMORY (11), BEALE (12), etc.

Por el contrario, si la condición que el programa óptimo debe cumplir es la que impone el orden tecnológico en que cada una de las clases de artículos debe ser procesada en cada una de las máquinas, la solución no es tan sencilla, y en muchos casos —precisamente los más generales—, aún no ha sido hallada. La razón reside precisamente en el limitado desarrollo que hasta ahora han alcanzado los denominados modelos de secuencias, ya que son éstos los que constituyen la base de partida para hallar las ecuaciones de condición que deben añadirse al modelo "standard" para asegurarse que la solución hallada sea factible.

Ya existe solución analítica —aunque no excesivamente analítica—, originada por AKERS y FRIEDMAN (13), para el caso en que existan dos procesos, artículos o pedidos y *m* factores fijos de la clase *b*. Brevemente expuesto, el método es el siguiente: de las 2^m ordenaciones posibles en teoría, se eliminan aquellas que no son factibles, por oponerse precisamente a las restricciones tecnológicas sobre el orden de procesamiento en cada máquina de cada uno de los artículos. De las restantes, mediante la aplicación de dos reglas, se pueden eliminar aquellas ordenaciones que no pueden ser óptimas. (Entiéndase por óptimo la minimización del tiempo inactivo, puesto que se trata de un modelo de secuencias, y es ésta su característica más general.) Finalmente, el grupo de ordenaciones que permanece, entre las cuales forzosamente se encuentra la óptima, debe ser objeto de un tratamiento gráfico, o numérico, para hallar ésta.

Este modelo parte de la hipótesis que T_{ij}, tiempo que el artículo *i*

(11) GR. E. GOMORY ha desarrollado un algoritmo para resolver los problemas cuando todas las variables sólo pueden tomar números enteros. Este algoritmo ha sido publicado con el título *An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programming*, Princeton-I. B. M. Mathematics Research Project, Technical Report núm. 1, 1958.

(12) A su vez, BEALE ha desarrollado un procedimiento para hallar la solución óptima en el caso mixto, cuando no todas las variables deben tomar valores enteros.

(13) C. W. CHURCHMAN, R. L. ACKOFF, E. L. ARNOFF: *Introduction to Operations Research*, John Wiley & Sons. New York, 1958.

requiere para ser procesado en el factor fijo j, es un dato conocido. En realidad, y visto el problema de la organización de la producción en su conjunto, $T_{ij} = t_{ij} x_i$, lo cual significa que depende de la cantidad que se decida producir del artículo i. Pero SALVESON (14), de forma astuciosa, ha hallado un procedimiento para resolver, cuando existen dos procesos activos utilizables y m factores fijos, a la vez el problema de las cantidades de cada artículo que deben producirse, así como el orden en que deben producirse, de forma tal que el beneficio sea máximo.

A partir del último grupo de ordenaciones, entre las cuales forzosamente se halla la óptima, se forma un modelo de Programación lineal para cada una de ellas. Una vez resuelto cada uno de estos modelos, se conoce el beneficio máximo respectivo, y este dato permite automáticamente clasificar las distintas alternativas y elegir la que mejor cumple al objetivo.

En cada uno de estos modelos la función que se ha de maximizar es idéntica:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2$$

puesto que tan sólo existen dos procesos activos. En cambio, varían las ecuaciones de condición, o, mejor dicho, los coeficientes de las ecuaciones de condición. Estas ecuaciones se forman de acuerdo con el siguiente razonamiento, aplicado a un ejemplo (15).

Existen cuatro máquinas, y el orden en que cada uno de los dos artículos debe ser procesado en cada máquina es el siguiente:

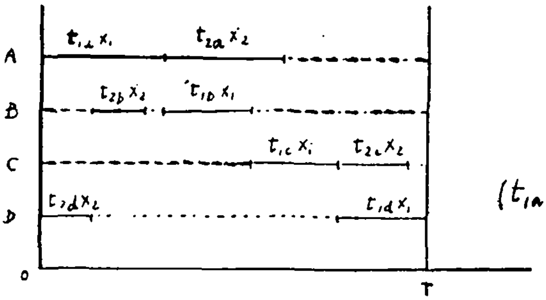
Prod. 1	*a b c d*
Prod. 2	*d b a c*

De las 16 ordenaciones posibles, tan sólo cuatro merecen consideración, ya que las otras no pueden ser óptimas. Sea t_{ij} ($i = 1, 2$; $j = a, b, c, d$) el tiempo necesario para elaborar una unidad del artículo i en la máquina j. Si elegimos una de las cuatro permutaciones, por ejemplo,

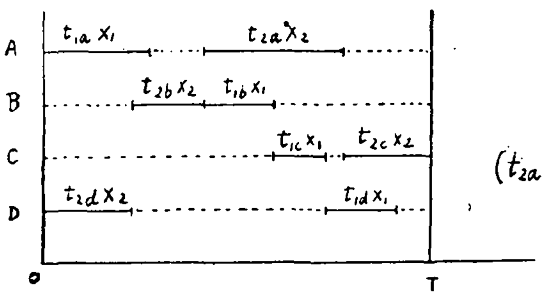
(14) M. E. SALVESON: *Op. cit.*

(15) Los datos del ejemplo están tomados de la obra de CHURCHMAN, ACKOFF y ARNOFF antes citada.

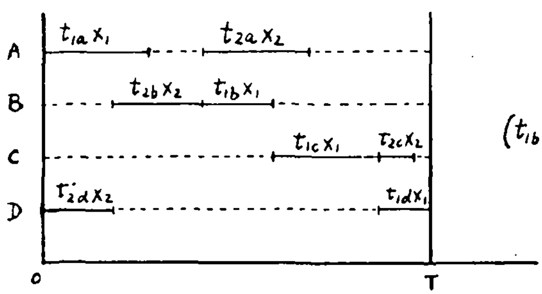
la $A\bar{B}C\bar{D}$ (la mayúscula sin tilde significa que en la máquina correspondiente el producto 1 ha de ser operado antes que el 2, y en las mayúsculas con tilde el caso contrario), las ecuaciones de condición serán las siguientes:



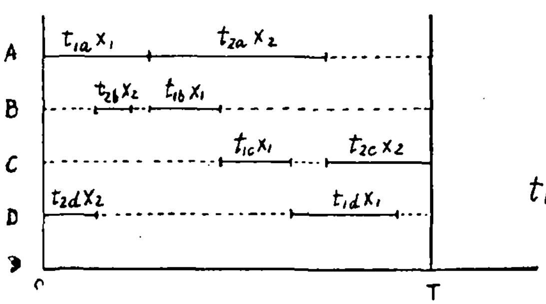
$$(t_{1a}+t_{1b}+t_{1c}+t_{1d})\,x_1 \le T$$



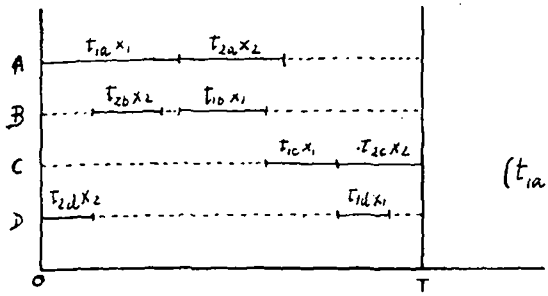
$$(t_{2a}+t_{2b}+t_{2c}+t_{2d})\,x_2 \le T$$



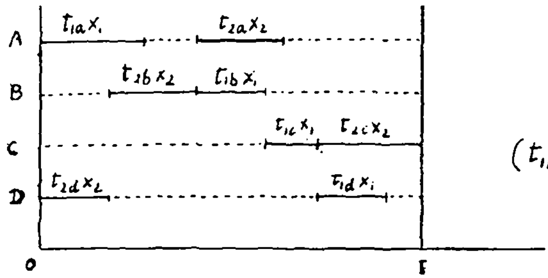
$$(t_{1b}+t_{1c}+t_{1d})\,x_1+(t_{2b}+t_{2d})\,x_2 \le T$$



$$t_{1a}x_1+(t_{2a}+t_{2c})\,x_2 \le T$$



$$(t_{1a}+t_{1b}+t_{1c})x_1+t_{2c}x_2 \le T$$



$$(t_{1b}+t_{1c})x_1+(t_{2b}+t_{2c}+t_{2d})x_2 \le T$$

Estas seis ecuaciones de condición, más la función antedicha que se ha de maximizar, permiten obtener la solución óptima, y el beneficio correspondiente, para la permutación A B C $\bar{D}$. Con un razonamiento análogo para las otras tres permutaciones se obtienen sus respectivas soluciones óptimas y beneficios. Finalmente, se elige la permutación óptima, la que mayor beneficio proporciona.

Aunque ingenioso, el camino a recorrer es largo y farragoso, pues cuando el número de factores fijos es elevado, las ecuaciones son tan numerosas, y la obtención de los coeficientes de las ecuaciones de condición tan complicada, que se requiere mucho tiempo y cálculos para la resolución.

En el caso en que el orden tecnológico de las operaciones sea el mismo para todos los artículos, la solución es mucho más sencilla, ya que JOHNSON y BELLMAN (16) han demostrado que, hasta un máximo de tres

---

(16) Vid. CHURCHMAN, ACKOFF y ARNOFF: *Op. cit.*

máquinas y n artículos, la secuencia óptima siempre implica la misma ordenación de los artículos sobre cada estación o máquina. La solución es más sencilla porque la ley de formación de coeficientes es entonces fácil de hallar. Puesto que tan sólo pueden existir o es necesario tomar en consideración $n!$ permutaciones, el número de sistemas que habrán de formarse será mucho más reducido.

Si el número de factores fijos es tres, y el de procesos activos dos, tan sólo necesitan ser examinadas las dos permutaciones siguientes, por los teoremas de JOHNSON y BELLMAN: A B C y $\overline{\mathrm{A\,B\,C}}$. El sistema de ecuaciones de la primera permutación será:

$$\sum_{j=1}^{r} t_{1j}\, x_1 + \sum_{j=r}^{3} t_{2j}\, x_2 \leq \mathrm{T} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

y el correspondiente a la segunda permutación.

$$\sum_{j=r}^{3} t_{1j}\, x_1 + \sum_{j=1}^{r} t_{2j}\, x_2 \leq \mathrm{T} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Si el número de procesos activos se incrementa, es también relativamente sencillo hallar los coeficientes que forman las ecuaciones de condición de cada una de las $n!$ permutaciones.

Las diversas soluciones halladas para el caso en que existan restricciones tecnológicas sobre el orden en que cada artículo ha de ser operado en cada máquina, cumplen asimismo la condición de que los lotes no pueden fraccionarse, y ello en cierta forma las hace insatisfactorias. Si los lotes pudieran fraccionarse en unidades enteras, lo cual puede ocurrir con gran frecuencia en la práctica, la complejidad del problema sería inmensa. En el caso de que existieran dos procesos productivos, con la misma ordenación tecnológica, y dos factores fijos, el problema puede resolverse de forma muy sencilla. Una vez hallado el orden óptimo aplicando la regla de decisión de JOHNSON y BELLMAN (17) para este caso (y es fácil de comprender por qué para la aplicación de esta regla es indiferente desconocer el número de unidades que se habrán de producir de cada artículo), y supuesto que este orden exija que se inicie

---

(17) Vid. CHURCHMAN, ACKOFF y ARNOFF: *Op. cit.*

con el artículo 1 y se finalice con el 2, la solución óptima, en cuanto a las cantidades que se deberán producir, se obtiene maximizando

$$p_1 x_1 + p_2 p_2$$

cumpliéndose

$$\begin{aligned}
&t_{11} x_1 + t_{12} x_2 + t_{22} \leqq \mathrm{T} \\
&t_{21} x_1 + t_{22} x_2 + t_{11} \leqq \mathrm{T} \\
&\quad (t_{11} + t_{21})\, x_1 + t_{11} + t_{21} \leqq 2\,\mathrm{T} \\
&\quad (t_{12} + t_{22})\, x_2 + t_{12} + t_{22} \leqq 2\,\mathrm{T} \\
&\quad x_1, x_2 \geqq 0 \text{ y, además, números enteros.}
\end{aligned}$$

Tan sólo el anterior planteamiento permite ya comprender por qué, generalmente, no se tiene en cuenta el aspecto de la ordenación al programar la producción. Cuando T es muy grande con respecto a las t_{ij}, y ello es lógico que ocurra, cuando los lotes pueden ser fraccionados en unidades enteras o no, aunque existan restricciones sobre el orden tecnológico, es muy probable que la solución hallada con el modelo tradicional, que tan sólo incorpora las ecuaciones de condición

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij}\, x_i \leqq \mathrm{T} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots m)$$

difiera casi imperceptiblemente de la que se hubiera obtenido planteando el problema con todos sus detalles y condiciones, de tal forma que el coste de la mayor complejidad no podría ser compensado por el beneficio de la mayor exactitud.

3.3. *Los factores fijos están compuestos por elementos idénticos indivisibles.*

Al existir factores del tipo *c*, la complejidad del problema aumenta sensiblemente. Ya no basta con determinar el momento del tiempo en que deberá ser iniciada la transformación de un artículo o una unidad en un factor fijo, sino que, además, es preciso indicar qué elemento del mismo deberá realizar la oportuna operación en cada una de las unidades. Los modelos de secuencias no han resuelto aún, desde su óptica, que implica la minimización del tiempo inactivo, el problema. Por ello no existe entonces aún la posibilidad de intentar ligar en un solo modelo los dos aspectos de la organización de la producción. Pero es evidente que cuando los coeficientes t_{ij} son relativamente importantes, en comparación de T, puede ser conveniente considerar las limitaciones impuestas sobre la primera etapa del problema por la segunda, única forma de asegurarse que no está infracondicionado el modelo de la Programación lineal. La diversidad de las condiciones que pueden existir: número de elementos que comprende cada sector fijo, ordenación tecnológica de cada uno de los artículos, etc., hace imposible un examen de todos los casos, y de los efectos de la consideración del tiempo en el plan de producción sobre el programa productivo.

ANTONIO SERRA RAMONEDA