LIBROS

LA PROGRAMACION LINEAL (*)

CAPITULO I

Una idea de la teoría de los juegos.

El germen de la teoría de los juegos, tal como la conocemos en la actualidad, está contenido en los artículos de E. Borel (Ref. 5). Este consideraba un caso especial del llamado Teorema Fundamental, pero no lo probaba. En 1928, John von Neumann dió una conferencia en la Mathematical Society, en Göttingen (Ref. 22), y aportaba una demostración de aquel teorema. Sin embargo, se había oído hablar muy poco de la teoría hasta 1944, cuando apareció el monumental trabajo de J. von Neumann y O. Morgenstern (Ref. 24). El contenido matemático de este libro incluía nuevos desarrollos y la reputación como economista del autor citado en segundo lugar constituía una garantía para una aplicación particular de la teoría. Pronto se advirtió —lo que no es sorprendente— que una teoría de juegos competitivos podría arrojar luz no solamente sobre las características de la competencia económica relativamente pacífica, sino también sobre las de combate y arte de la guerra. A partir de entonces se desarrollaron cuidadosamente los aspectos prácticos y teóricos, y hasta el momento la teoría de los juegos ha extendido su actividad al campo de la investigación comprendiendo temas tan abstractos como la teoría de conjuntos y la topología. En este libro se supone solamente un conocimiento elemental de álgebra y de geometría analítica lineal.

(*) La traducción del original inglés ha sido realizada por María Teresa Fuentes y Gonzalo Arnáiz Vellando.

La teoría de la Programación Lineal encontró un estímulo a su avance en los problemas económicos, aunque ha logrado su consagración como tal teoría por derecho propio. Se refiere a un problema de maximización (o minimización) que no puede solucionarse por los métodos de cálculo diferencial. Es una característica interesante la de que los problemas de la teoría de juegos puede demostrarse que forman un caso especial de la Programación Lineal.

En la mayor parte de las aplicaciones de la Teoría de los Juegos o de la Programación Lineal, los cálculos que se necesitan son tan extensos que parecería imposible llevarlos a cabo durante la vida de aquellas personas que se interesan por el resultado.

Una gran parte de la investigación se ha invertido en métodos de cálculo, y la aparición de medios automáticos ha hecho posible encontrar la solución dentro de un plazo razonable de tiempo. Este libro se ocupará con gran frecuencia del cálculo, pero sin prestar una atención especial a los problemas planteados por el cálculo automático. Se utilizarán representaciones geométricas cuando éstas puedan facilitar la comprensión de aquellos lectores que encuentren interesantes tales métodos. Sin embargo, aquellos que prefieren las matemáticas descubrirán el tratamiento preciso.

2. Planteamos los problemas que ocuparán nuestra atención a través de un ejemplo sencillo aunque característico: el juego de cara o cruz. Sus reglas son éstas: cada uno de los dos jugadores A y B saca una moneda y la pone cara o cruz, sin mostrarla a su oponente. Las monedas se descubren entonces y A se guarda las dos si están del mismo lado; en el otro caso B gana.

Este juego, quizás no muy emocionante, es conveniente para introducir una terminología que está ya admitida en la literatura Tenemos dos jugadores, de aquí que hablemos de un juego "bipersonal". Un jugador gana lo que el otro pierde, o en otras palabras, la suma de sus ganancias es cero. Por eso el nombre aceptado generalmente de: juego de "suma-cero". Un "juego", según nuestros supuestos, es una colección de reglas que determinan lo que el jugador debe hacer y ganar. La ganancia depende eventualmente del comportamiento de los jugadores. Un juego consta de jugadas; el de cara y cruz proporciona solamente una para cada jugador. Una realización de un juego se llama "partida".

La característica fundamental de los juegos que considera esta teoría es la de que la ganancia o pérdida de cualquier jugador depende no solamente de sus propias acciones sino también de las de su oponente. Es evidente que esta característica aparece también en algunos problemas de Economía, por ejemplo en una subasta, en la Bolsa y también en la guerra.

Un tipo de juego que está inspirado en modelos asociados a situaciones de guerra es el llamado juego de Blotto, del cual tratamos un ejemplo muy elemental de la Ref. 26: "El general A manda cuatro compañías y el coronel B (Blotto) cinco. El general puede tomar una ciudad por dos caminos diferentes y puede enviar cada compañía al camino que desee. El coronel puede ordenar que cada una de sus compañías defienda cualquiera de los caminos. A gana si en cualquiera de los caminos tiene más compañías que Blotto." Existen versiones más complicadas. Remitimos al lector a la Ref. 20, Ref. 3 y la pintoresca Ref. 28.

Continuamos dando ejemplos de juegos y discutiendo sus características formales.

En los juegos con más de una oportunidad para cada jugador es natural imaginar que cada uno de ellos decide su elección mientras se desarrolla el juego. Sin embargo, algunas veces es conveniente pensar que deciden antes de que se puedan tener en cuenta todas las posibles circunstancias futuras. Un conjunto de elecciones para cada situación posible se llama una "estrategia". En los juegos con una jugada solamente ésta se identifica con la estrategia.

A título de aclaración consideramos un juego muy sencillo con "farol". Por este término entendemos que un jugador puja alto con una mala jugada para inducir a su oponente a creer lo contrario y que deje de hacer una jugada que podría llevarle al éxito. Esto no es una definición técnica de "farol" que en cualquier caso es muy difícil de dar. Pero el lector comprenderá el término si piensa en juegos tan populares como el Póker o el Bridge.

El juego es como sigue: A obtiene una de las dos posibles cartas, la "alta" o la "baja", con una probabilidad igual. Si recibe la carta alta, debe entonces pedir 2 £. Si recibe la carta baja debe pagar 1 £ o pedir 2 £. B puede, pero no obligatoriamente, disputar la apuesta. Si no lo hace, entonces paga 1 £. Si la disputa, gana 2 £

si A tiene la carta baja, pero pierde 2 £ si A tiene la carta alta.

Este juego nos ofrece también lo que se llama una jugada de suerte, esto es, una jugada cuyo resultado depende de la suerte. En este caso la suerte depende del tipo de carta de A. Trazaremos ahora las estrategias para este juego y analizaremos sus efectos.

Estrategia de A:

Si la carta es alta, la petición es obligada, pero si la carta es baja puede o bien pagar 1 £ (estrategia A_1) o arriesgar 2 £ (fanfarronea, estrategia A_2).

Estrategia de B:

Si A paga, B puede solamente aceptar 1 £. Pero si A se arriesga, entonces B puede o bien disputar con A (estrategia B_1) o no (estrategia B_2).

Los resultados se calculan como sigue:

(A_1, B_1). Si la carta fuese baja, A paga 1 £. Si la carta es alta, A apuesta 2 £, y cuando B acepta gana 2 £. La probabilidad de cada uno de estos acontecimientos es ½, de aquí que el pago promedio será de 1 £ a A.

(A_1, B_2). Si la carta es baja, A paga 1 £. Si la carta es alta, A expone 2 £ y B paga 1 £. El pago promedio es 0.

(A_2, B_1). Si la carta es baja, A expone 2 £, y cuando B acepta pierde 2 £. Si la carta es alta, A expone 2 £, y cuando B acepta gana 2 £. El promedio es nuevamente 0.

(A_2, B_2). Si la carta es baja, A expone 2 £ y B paga 1 £. Si la carta es alta, A apuesta 2 £ y B paga 1 £. De aquí que el pago es 1 £ a A.

La reducción de una estructura de juegos a estrategias se llama "normalización". Existe una teoría elaborada que se refiere a los juegos en su forma "extensiva", es decir, teniendo en cuenta la sucesión de oportunidades y en particular del patrón de "información", esto es, lo que cada jugador sabe sobre sus propias oportunidades iniciales y las de su contrario. No entraremos aquí en esta cuestión y remitimos al lector a las Refs. 24 y 20.

No todos los juegos son juegos de suma-cero. En muchas transacciones es razonable suponer que el valor atribuído por el comprador a los bienes que adquiere es mayor que el precio pagado, mientras que el último es por lo menos el valor dado a los bienes por el vendedor. Evidentemente, la pérdida de un barco concreto puede significar mucho más para la terminación feliz de una guerra de lo que el enemigo puede suponer. Formalmente, sin embargo, un juego de suma-no-cero, con dos jugadores, puede considerarse como un juego de suma-cero de tres personas suponiendo que cualquier desequilibrio entre los dos pagos se compensa o recibe por un tercer jugador que no tiene influencia sobre el desarrollo del juego y cuyo único propósito es el de realizar o recibir pagos.

Generalizando, pueden suponerse juegos de n personas en los que juegan n oponentes. Tales juegos pueden o no ser de suma-no-cero, dependiendo del balance de todos los resultados al final de la jugada. La teoría hasta ahora ha dado menos resultados en la medida en que se va desde generalizaciones más sencillas a más complicadas. En este libro nos ocuparemos solamente de los juegos bipersonales, pero mencionaremos, aunque sea de pasada, que hay dos tipos de juegos de n personas que se conocen por los nombres "cooperativos" y "no cooperativos". Los primeros son aquellos de los que se ocupa la Ref. 24, y su característica fundamental es la de la posibilidad de que los jugadores formen "coaliciones" al margen del juego, coordinando las estrategias que aplicarán a lo largo del juego. Se ha tratado, no con pleno éxito, de considerar tales acuerdos como partes del mismo juego y prohibir toda asociación al margen del mismo. Los juegos en los que cada jugador se cuida exclusivamente de sí mismo se llaman no-cooperativos (Ref. 21); los juegos de suma-cero de dos personas siempre pertenecen a esta categoría.

3. Debemos aclarar totalmente que la teoría de los juegos plantea la cuestión de cuál es el mejor procedimiento de conducta para los jugadores mediante una filosofía bien definida. Esta cada cual puede aceptarla o rechazarla. Para un matemático tiene un gran atractivo el hecho de que la misma conduce a resultados matemáticamente interesantes. La aptitud sicológica que presupone se precisará gradualmente. No es la de un jugador que juega bajo impulsos emocionales. Nuestro jugador analiza la situación de una forma completamenet objetiva.

Consideremos ahora un juego más sofisticado que el de las monedas con las siguientes reglas:

A y B eligen, independientemente, uno de los valores -1, 0 ó $+1$. Designemos por S la elección de A y por t la de B. Entonces B paga a A la cantidad $S(t - S) + Y(t + S)$.

Resulta claro que cuando A elige no puede estar cierto del resultado, porque éste depende también de la elección de B. Para obtener un cuadro completo de todas las posibilidades calculamos los resultados potenciales medios, lo que se llama un cuadro de pagos o matriz de pagos, y aparece en el caso presente como sigue:

		B elige t		
		-1	0	$+1$
A elige S	-1	2	-1	-2
	0	1	0	1
	$+1$	-2	-1	2

Ponemos de manifiesto las cantidades que gana A y, por tanto, las que pierde B, dando las combinaciones de las elecciones respectivas que determinan los apartados del cuadro.

Añadiremos que las ganancias del jugador A están indicadas en el cuadro cuyas elecciones corresponden a las líneas de la matriz. Llamaremos a éste el jugador "Primero" o de "maximización", y a su oponente el "Segundo", o de "minimización". Este último tratará de hacer la cantidad en la tabla lo más pequeña posible, dado que sus ganancias son lo opuesto a lo que se figura en la tabla. Si cualquier cifra es negativa, entonces el Primer jugador pierde y gana el segundo el valor absoluto de la cantidad indicada. Con estas condiciones podemos considerar que un juego se define por su matriz de pago.

Vemos a simple vista que la cantidad que A gana depende de la elección de B.

Ningún jugador sabe (sin engaño) lo que el otro hará. La teoría de los juegos supone que ambos discuten de la forma siguiente:

En cada elección que yo haga debo temer que mis oponentes se decidirán por aquella otra que haga que mis ganancias (o ganancia promedio, si hay una jugada de azar) sean lo más pequeñas posibles. De aquí que si yo me decido por aquella elección que hace esta ganancia mínima lo más grande posible, entonces me encuentro a cubierto, dentro de lo que cabe esperar.

Si ambos disputan en esta cauta (o quizás derrotista) forma, entonces en el juego presente A observa que gana por lo menos — 1, 0 ó + 1, dependiendo de que haga S = — 1, 0 ó 1. Elegirá así s = 0 dado que esto le proporciona la mayor ganancia entre todas las ganancias mínimas que espera obtener. B, jugando de un modo análogo, decidirá elegir $t = 0$. La ganancia real de ambos jugadores será entonces cero.

Este tipo de argumentación es fundamental para nuestro análisis. Nos preguntamos ahora lo que A y B debieran hacer si supiesen lo que el otro había decidido o mejor si supiesen que jugarían en la forma anteriormente indicada y actuaran en consecuencia.

Si A supone que B, siguiendo este razonamieno (o por cualquier otra razón), ha elegido 0, él entonces elegiría también 0, ya que esto le proporciona el montante mayor en la segunda columna, que corresponden a la elección de 0 por B. De aquí que él haría lo que ya ha decidido hacer sobre la base de esta previa argumentación. De un modo similar, B no se sentiría afectado en su decisión aunque supiese por adelantado que A había elegido 0, como puede verse en la tabla. Vemos que la aproximación de "segundo orden", es decir, la suposición de que el oponente actúa de acuerdo con la filosofía de la teoría de los juegos no inducirá a los jugadores a cambiar su decisión de "primer orden" tomada teniendo en cuenta aquella teoría.

Esta característica del presente juego depende del hecho de que haya una cifra en la tabla de "resultados" que es el más pequeño de su fila y al mismo tiempo el mayor en su columna. La posición de esta cifra se describe a menudo por una analogía geométrica obvia como un "punto de silla", y aunque esta expresión ignore la carencia de continuidad del conjunto de términos de la matriz de juego, y no sea por tanto enteramente adecuada, la utilizaremos porque está ya establecida. Sin embargo, eliminaremos la expresión de von Neumann y Morgenstern "juego especial determinado estrictamente" (p. 150 de Ref. 24), que es lo mismo que juego con punto de silla.

Claro es que no todo juego bipersonal de suma-cero tiene un punto de silla: El juego de cara y cruz es un ejemplo trivial distinto en que no hay punto de silla. Como aclaración consideremos el ejemplo siguiente:

Los dos jugadores eligen independientemente un número entre 1, 2, 3. Si ambos eligen el mismo número A paga a B la cantidad del número elegido. En caso contrario A recibe la cantidad de su propio número de B. La tabla de "Pagos" de este juego es la siguiente:

		Elección de B		
		1	2	3
Elección de A	1	—1	1	1
	2	2	—2	2
	3	3	3	—3

El mínimun de la columna máxima (2) es diferente del máximum de la columna mínima (—1). Esto quiere decir, como es obvio se demostrará analíticamente en el Cap. III, que no hay punto de silla en esta tabla. Debemos descubrir un método para "solucionar" tales juegos y debemos, sobre todo en principio, ponernos de acuerdo sobre lo que entendemos por "solución".

En un ejemplo tan simple como el de "cara y cruz" es fácil ver lo que podría hacerse. Si el juego no se juega sino una vez entonces ninguna elección es mejor que otra. Pero si se repite, entonces sería fatal por parte de cualquiera de los jugadores que mostrasen preferencia por cara o cruz, porque su oponente podría obtener ventaja de esta predilección. Deberán elegir cara o cruz con la misma frecuencia, de tal modo que sea imposible al adversario adivinar lo que va a elegir. Tal elección al azar, con frecuencia a largos plazos iguales, podría lograrse, por ejemplo, "lanzando" la moneda.

Este argumento se aplica a ambos jugadores y suponemos que ambos actúan de acuerdo. Entonces, a lo largo del juego, ambos ganarán 1 en la mitad de las jugadas y perderán 1 en la otra mitad. Así el promedio de ganancia es 0.

A este resultado nosotros aplicamos un análisis que es similar al aplicado a los juegos con un punto de silla. Supongamos que A sabe, o cree que sabe, que B utilizará sus dos posibles estrategias con frecuencias iguales. Entonces no tiene razón para cambiar su elección primera de frecuencias iguales. En realidad, podría elegir cualquier frecuencia sin cambiar el "pago promedio". Sin embargo no sería conveniente para él hacer un cambio, porque B podría perjudicarle si lo hace. El mismo argumento se aplica a B.

La característica de la estabilidad que hemos demostrado que existe en los juegos con punto de silla vemos ahora que existe también en otros juegos con tal de que consideremos también combinaciones de estrategias con frecuencias determinadas. Una combinación semejante se llama "estrategia mixta", y las estrategias únicas que aparecen como etiquetas en la matriz de "pagos" las llamamos "puras". Son, claro está, un caso especial de estrategias mixtas, donde las frecuencias relativas son cero para todas las estrategias puras menos una que más tarde se utiliza todo el tiempo. Así, cuando hablemos de estrategias, nos referimos a las mixtas, a menos que se establezca explícitamente de otro modo.

Un par de estrategias con la característica de estabilidad que hemos descrito se llama "una solución" (ver III. 3, rigurosa definición). La estrategia que aparece en una solución se llama "óptima".

Para aclarar estos conceptos con otro juego tomamos el juego con "farol" introducido al principio. Su matriz de pago es

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{B}} \\
 & & B_1 & B_2 \\
\hline
\multirow{2}{*}{A\ \Big\{} & A_1 & 1/2 & 0 \\
 & A_2 & 0 & 1
\end{array}
$$

La solución de este juego es: para A tomar la primera estrategia pura doble número de veces que la segunda, y para B hacer lo mismo. Escribimos esto, así: (2/3, 1/3) tanto para A como para B. Esto es, en realidad una solución, ya que ningún jugador puede hacer nada mejor si el otro se atiene a su estrategia, pero podría ganar menos o perder más de 1/3 (que es lo que A gana ahora) si no se atiene a la solución óptima y su oponente se aprovecha de esto. Incidentalmente, es interesante advertir que el "farol", que es una característica de la segunda estrategia pura de A, se aplica una de cada tres veces en su estrategia óptima.

Es posible que un juego tenga más de una solución. Así, por ejemplo, el juego con matriz de pago

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

tiene la solución: (1/3, 2/3) para A, y (0, 1, 0) para B. Y también la solución: (2/3, 1/3) para A y nuevamente (0, 1, 0) para B. Se deduce de aquí que las estrategias

$$\left[\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}(1-t), \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}(1-t)\right]$$

para A, y (0, 1, 0) para B son también soluciones para cualquier valor de t entre 0 y 1.

Ahora difícilmente sería justificable hablar de una estrategia óptima sin ninguna cualificación, si no pudiese constituir una solución más que asociada con alguna estrategia óptima particular del oponente. Sin embargo, probamos en III. 3 que si S_A y S_B son dos estrategias de A y B respectivamente que forman una solución y si esto es también cierto para t_A y t_B, entonces (S_A, t_B) y (t_A, S_B) son también soluciones y ambos grupos producen el mismo pago. El pago resultante de una solución se llama el "valor" del juego. Hemos visto que no todos los juegos tienen un punto de silla. Sin embargo, es un hecho fundamental en la teoría de los juegos el de que cada juego de dos personas de suma-cero con un número limitado de estrategias tiene una solución, posiblemente con estrategias mixtas, para uno o para ambos de los jugadores. La demostración se dará en el Cap. III.

Un juego en el que ambos jugadores utilizan todas sus estrategias en su solución óptima se llama "completamente mixto" (Referencia 13). El de cara y cruz y el de "farol" son juegos de este tipo, pero el siguiente no:

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

El lector comprobará fácilmente que la solución es: (1/4, 3/4) para A, y (1/2, 1/2, 0) para B. Este juego permite aclarar el concepto de "dominio". Decimos que una estrategia pura domina a otra, del mismo jugador, si para cualquier elección del oponente la primera es por lo menos tan favorable como la otra y al menos una elección es mejor. La matriz de pago anterior demuestra que B estaría loco si utilizase su tercera estrategia, que viene dominada por su segunda.

No es sorprendente que la tercera estrategia no aparezca en la estrategia óptima de B y podría haberse ignorado desde el principio.

Debe, sin embargo, entenderse que incluso una estrategia dominada puede ser óptima. Por ejemplo, en el juego

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

hay dos soluciones (1, 0) para A, y (1, 0) para B, y también (0, 1) para A y otra vez (1, 0) para B. De esta forma ambas estrategias puras de A son óptimas, aunque la segunda domine la primera.

No hemos dicho nada sobre la forma de encontrar las soluciones de un juego, sino solamente cómo probar si un par de estrategias son o no una solución. Añadimos ahora que si la matriz de pago es simétrica de tal forma que pueden cambiarse los papeles de los jugadores sin que se altere el valor del juego, es que el valor del juego es eminentemente cero.

Los métodos generales de solucionar juegos se dan más tarde, en particular en el capítulo IX, pero el lector impaciente se alegrará de saber que las soluciones de todos los juegos que citamos están recogidas en el Repertorio al final del libro.

CAPITULO II

Representación gráfica

Resultará de utilidad para los lectores que prefieren pensar en términos geométricos la introducción que ahora hacemos de una representación gráfica de los conceptos de la teoría de los juegos. Para una presentación en el plano bi-dimensional, consideramos juegos en que uno de los dos jugadores tiene solamente a su disposición dos estrategias puras, y elegimos otra vez como ejemplo

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mostraremos modelos geométricos tanto para las estrategias de A como de B, siendo el primero un jugador con dos estrategias puras. Los resultados pueden adaptarse fácilmente al caso en que

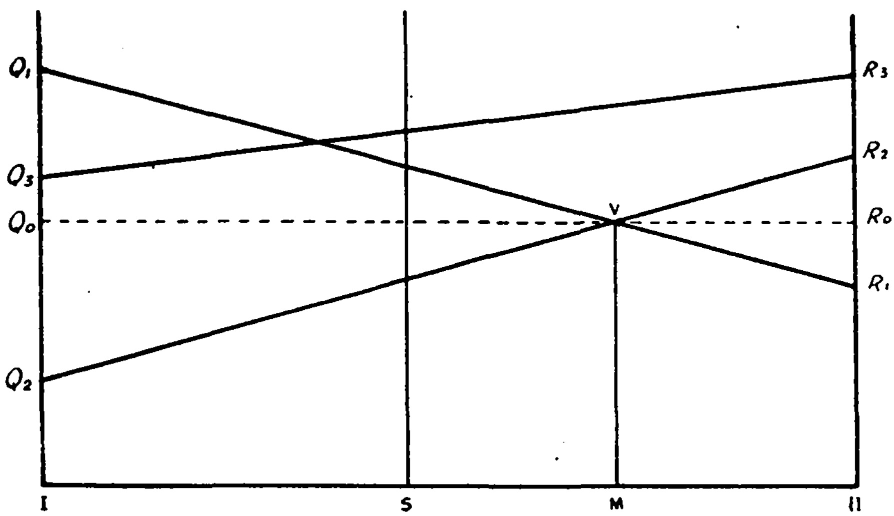

Fig. II.1

sea únicamente el jugador de minimización el que tiene dos estrategias puras.

A, puede elegir cualquiera de estas dos estrategias puras o un combinado de ambas. Su elección puede señalarse sobre una línea recta de longitud 1, como la que se indica en la figura II. 1, cuyos extremos I y II representan, respectivamente, las dos estrategias. Cualquier punto intermedio representa una combinación de las mismas, de tal forma que, por ejemplo, la estrategia (1/4, 3/4) vendrá dada por un punto cuyas distancias de II y I están en proporción 1:3.

Los puntos fuera de la línea I-II no nos interesan aquí, porque éstos no se pueden alcanzar por dos frecuencias no-negativas.

Perpendicularmente a la línea I-II llevamos en ordenadas las cantidades que A gana cuando B utiliza una de sus estrategias, por ejemplo, la primera. En este caso A gana 4, cuando emplea la táctica I, y si usa II obtiene 2. Por otra parte, si elige cualquier combinación (m, n) con $m + n = 1$, gana $(4\,m + 2\,n)$.

Todos estos puntos representativos que tienen como abcisa n y como ordenada $4 - 2\,n$ con relación al punto I se encuentran sobre el segmento de recta $Q_1 R_1$ de la figura.

Los segmentos $Q_2 R_2$ y $Q_3 R_3$ que corresponden a la segunda y tercera estrategia de B se representan también.

Supongamos ahora que A ha elegido la estrategia mixta representada por S en el diagrama. Cualquiera que sea lo que B haga, A obtendrá por lo menos una cantidad representada por la ordenada de la intersección más baja de la vertical a través de S con las rectas que corresponde a las estrategias de B en la figura (la segunda estrategia de B). Una ordenada análoga puede asociarse a cualquier punto del segmento en I-II de acuerdo con la teoría de los juegos. A podría elegir un punto para maximizar esta altura. A debe elegir un punto que maximice esta ordenada mínima. Debe elegir la estrategia representada por M, la que está a una distancia de 3/4 de I y 1/4 de II.

Su estrategia óptima es así (1/4, 3/4) como ya hemos visto en I 3. Se da una ganancia de 2.5, que es la ordenada de V (sobre la vertical de M) y el valor del juego.

El diagrama muestra también que B nunca debiera utilizar su tercera estrategia pura, porque el segmento $Q_3 R_3$ que le corresponde está sobre el correspondiente a su segunda. El que la primera o segunda estrategia pura sea mejor para B depende de la elección de A; si A elige M, entonces cualquier combinación de las dos primeras estrategias de B conduce al mismo resultado.

El lector apreciará que la disposición de las líneas de estrategia puede ser muy diferente de las de nuestro ejemplo presente y mencionamos en particular dos casos: (a) cuando hay una estrategia pura y (b) cuando hay más de una estrategia óptima para A. Estas se representan en la fig. II.2. Ahora volvamos a B. Si hay un punto de silla, la respuesta es trivial. Si no hay ninguno, entonces resulta claro de la figura II.1 que B debe utilizar sus dos primeras estrategias puras solamente y se demostrará más tarde (en IX 4) que si A tiene solamente dos estrategias puras, B no necesita utilizar una combinación de más de dos estrategias propias.

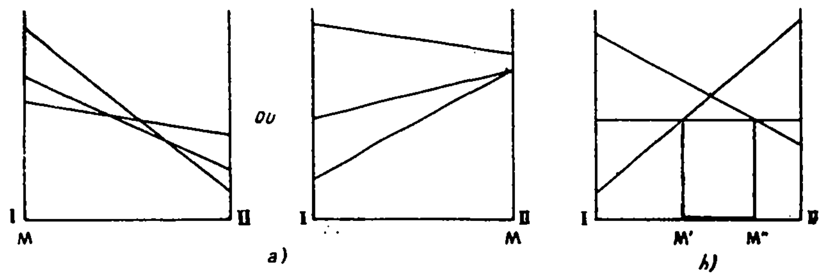

Fig. II.2

La estrategia óptima de B se ha caracterizado por el hecho de cualquier cosa que A haga; el resultado es el mismo. De aquí que sea posible encontrar la combinación de B, trazando $Q_0 R_0$ paralela I-II a través de V y tomando la razón $Q_0 Q_1 / Q_0 Q_2$ o también $R_0 R_1 / R_0 R_2$ (ver fig. II.1). Estas razones son iguales en virtud de propiedades simples de triángulos semejantes y también iguales a la razón de las frecuencias con las que se utilizan las estrategias puras en la estrategia óptima.

2. Otro procedimiento posible para descubrir estrategias óptimas de B consiste en la generalización del diagrama a tres dimensiones. Sin embargo, una generalización semejante será impo-

sible si B tiene más de tres estraegias puras. Introducimos otro método que tiene la ventaja de que puede proporcionar un cuadro completo que se refiera simultáneamente a ambos jugadores (suponiendo que uno de ellos tiene solamente dos estrategias puras).

En este nuevo método cualquier estrategia de B se representa por un punto, las coordenadas del cual son los dos resultados frente a las dos estrategias puras de A. En nuestro ejemplo aclarativo los puntos serán $P_1 = (4, 2)$, $P_2 = (1, 3)$ y $P_3 = (3, 4)$.

Si B utiliza cualquier combinado $p\,P_1 + q\,P_2 + r\,P_3$ (la notación es auto-explicativa), entonces el resultado para A es el promedio ponderado de los resultados referentes a cada estrategia pura, siendo las ponderaciones p, q y r que suman 1. De

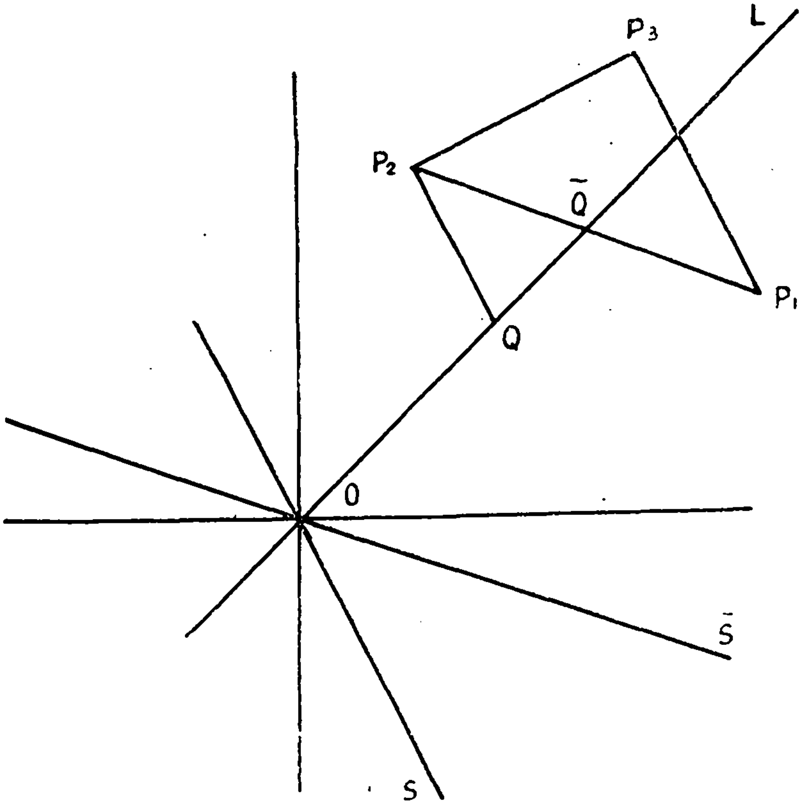

Fig. II-3

aquí que la estrategia de B (p, q, r) se representará por un punto cuyas abcisas y ordenadas son los promedios ponderados de las abcisas y ordenadas de los puntos de las estrategias de B. Trazamos así el "polígono de las estrategias" de B. Este es un polígono que incluye todos los puntos que representan estrategias puras y también cualquier punto que se apoya sobre una línea recta entre otros dos puntos cualquiera del polígono. Así hay una región convexa y se conoce como la cápsula convexa de los puntos dados. Todos sus vértices corresponden a estrategias puras, aunque algunas estrategias puras pueden también corresponder a puntos dentro del polígono.

Nos referimos solamente a puntos dentro y sobre los ángulos del polígono de estrategias, ya que los puntos exteriores podrían solamente darse si por lo menos una ponderación fuese negativa. Dando ahora el punto del polígono, o lo que es lo mismo la estrategia elegida por B, A debiera elegir de entre sus propias estrategias aquélla que haga la ganancia más elevada.

Si elige su primera estrategia pura gana su ganancia y está representada por la abcisa del punto elegido por B, y si elige su segunda estrategia pura, su ganancia está representada por la ordenada de B. Por tanto, si este punto está encima o debajo de la línea L, primera bisectriz de los ejes coordenados, A elegiría su segundo o primero. Si el punto está sobre L, entonces A obtiene la misma ganancia, cualquiera que sea la estrategia que elija, ya sea pura o mixta. B, seleccionaría aquel punto del polígono que da a A menos, esto es, cuya mayor coordenada cae lo más pequeña posible.

Para encontrar este punto geométricamente, imaginemos un ángulo recto con su vértice desplazándose sobre L y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas y orientado negativamente. Supongamos que este ángulo, colocado a la izquierda y por debajo del polígono se desplaza hacia la derecha y arriba hasta que toca al polígono. El punto de contacto o uno de ellos indica una estrategia óptima de B.

Se verá que si L corta el polígono y si la intersección de coordinadas mínimas está sobre un ángulo de pendiente negativa (es decir, que desciende hacia la derecha), entonces este punto de intersección es la estrategia óptima de B ($\bar{Q}$ en la fig. II.3). Si por el contrario una por lo menos de estas condiciones no se cumplen, entonces será uno de los vértices el que indique la estrategia de B y esta es entonces una estrategia pura, como vemos en la fig. II, 4.

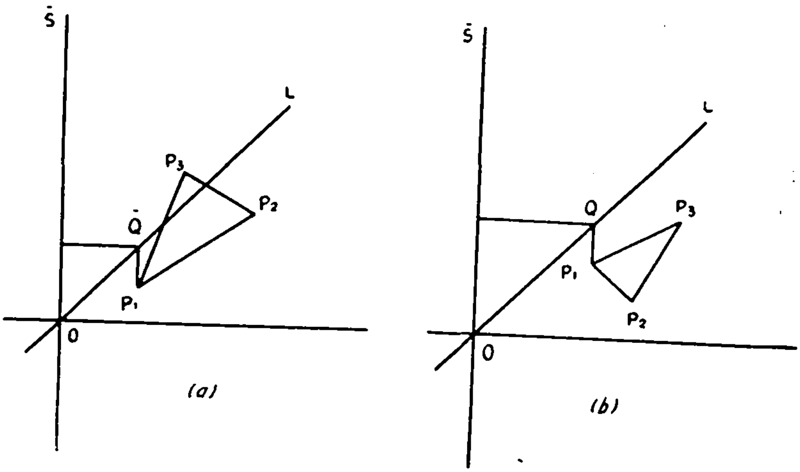

Fig. II-4

Podemos describir la construcción diciendo que trazamos una horizontal y una vertical a partir del vértice que está más a la izquierda del polígono; si la bisectriz L, que va de izquierda a derecha, encuentra una de estas semirrectas de apoyo antes de encontrar el polígono, la solución del juego contiene la estrategia de B que está representada por el vértice de donde sale esta semirrecta horizontal o vertical. Debiera advertirse que esto puede ocurrir incluso si en su curso ulterior la bisectriz L encuentra un lado del polígono (como en la fig. II.4 (a). En (a) ninguna estraegia pura de A domina la otra, mientras que en (b) domina la primera estrategia pura. Las dos partes de la fig. II, 4 se refieren a juegos definidos por

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Es evidente que si hay un punto P_a en el polígono anterior y a la derecha y por debajo hay un punto P_b, también en el polígono, entonces P_a no debe considerarse porque P_b tiene ambas coordenadas más pequeñas que P_a. Esto explica el significado de las inclinaciones de los lados del polígono de estrategia de B. En la figura II-3 la primera intersección de L con el polígono se encuentra en una línea de pendiente negativa y los soportes verticales y horizontales son irrelevantes en este caso.

3. Intentamos ahora dar una representación de las estrategias de A que pueden superponerse sobre la misma figura a las de B y ofrecer así un cuadro completo para ambos jugadores a la vez. Debemos encontrar un procedimiento que permita mostrar las ganancias de A y cómo éstas dependen de su elección de estrategia.

Designemos las dos estrategias puras de A por S_1 y S_2. Supongamos que elige la combinación (m, n) $m + n = 1$. Si B elige el punto de estrategia $P = (x_1, y_1)$ entonces el resultado para A es $m\,x_1 + n\,y_1$ y queremos encontrar una representación geométrica conveniente para esta expresión.

Trazamos una línea a través del origen cuya ecuación es $m\,x + n\,y = 0$ y la llamamos línea de estrategia de A. Dado que m y n son no-negativas, esta línea coincidirá con uno de los ejes o tendrá una inclinación negativa. Hay que advertir también que si $m = 1$ y $n = 0$, la línea de estrategia será el eje de las ordenadas y $m\,x_1 + n\,y_1$ es entonces simplemente la distancia de P a este eje, es decir, la abscisa de P. Una consideración similar se aplica a $m = 0$ y $n = 1$ ahora es la ordenada de P. Sin embargo, la distancia de P a la recta $m\,x + n\,y = 0$, no es, en general, simplemente el promedio de abscisa y ordenada con ponderaciones m y n respectivamente. Se requiere entonces una representación diferente.

Trazamos una paralela, a través de P, a $m\,x + n\,y = 0$, esto es, la línea cuya ecuación es

$$m\,x + n\,y = m\,x_1 + n\,y_1$$

obtengamos la intersección de esta recta con $x = y$, es decir con L (ver figura II.3). El punto de intersección Q tiene una abscisa y ordenada iguales a

$$(m\,x_1 + n\,y_1)\;/\;(m + n) = m\,x_1 + n\,y_1$$

que es la expresión de la ganancia de A.

Consideramos ahora de nuevo la línea de estrategia de A

$$m x + n y = 0$$

B deberá elegir aquel punto de estrategia disponible, a través del cual una línea de estrategia de A corta a L en un punto con una abscisa (u ordenada) lo más pequeña posible. En general, este punto será el vértice en donde el polígono de las estrategias de B es tocado en primer lugar por una paralela a la recta estratégica de A que va en el plano de arriba abajo y de derecha a izquierda.

En casos especiales, cuando el primer lado de contacto del polígono es paralelo a la línea de estrategia, todos los puntos del mismo son igualmente buenos para B y, en particular, cualquiera de los dos vértices de este lado que corresponden a estrategias puras.

A elegirá la línea de estrategia S que hace la abscisa del punto L, que B obtiene por el argumento anterior, lo más grande posible (ver el punto $\overline{Q}$ con las figuras II.3 y II.4). Si el polígono de B corta L primero (es decir, el más próximo a la base izquierda) en un lado de pendiente negativa, entonces A no puede hacer nada mejor que elegir su línea paralela a aquel lado (como en la figura II.3). Pero si no hay intersección ninguna, o primero una intersección con un ángulo de pendiente positiva (como en la figura II.4), entonces A debiera elegir aquel de los dos ejes de coordenadas que está más lejano del mejor punto de B. (Es necesario recordar que no puede elegir una línea con pendiente positiva).

En todos estos casos se ve que la estrategia óptima de B es la respuesta correcta a la elección óptima de A y viceversa.

El número de ecuaciones m será, en general, más pequeño que el número de variables n; pero incluso así no podemos estar seguros de que exista una solución no-negativa. Esto se aclara con el siguiente ejemplo:

Consideremos las condiciones

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 - x_3 = 2$$

Por sustracción obtenemos

$$x_2 + x_3 = -1$$

que no admite solución posible con valores no-negativos.

Para hacer la siguiente discusión más sencilla, introducimos los siguientes términos:

Una "solución" es cualquier grupo X_i que satisface todas las ecuaciones de condición respecto de los signos de las variables. (No se tienen en cuenta, así como tampoco la forma lineal que hay que hacer óptima.)

Una solución "posible" (s. p.) es una solución con las X_i no-negativas. Una "base" es un grupo de "m" variables tales que la matriz de sus coeficientes en las "m" ecuaciones de condición no es singular. Estas "m" variables son "variables básicas" (v. b.) relativas a las bases, y otras son "variables no-básicas" (v. n. b.). La solución básica asociada con una base se obtiene haciendo las v. n. b. iguales a cero y resolviendo las ecuaciones de condición para las v. b.

Una "solución posible básica" (s. p. b.) es una solución básica que es también posible.

Estaría más de acuerdo con el álgebra designar con la palabra base el sistema de m vectores con m componentes definidos respectivamente por las m columnas de la matriz cuadrada no singular de que acabamos de ocuparnos.

En otras palabras: siempre existe una solución al menos en términos de estrategias combinadas. Las estrategias óptimas pueden deducirse del diagrama. Así, en la fig. II.3, la estrategia óptima viene dada por $(1/2, 1/2, 0)$, mientras que la de A viene dada por los coeficientes de la ecuación de $\overline{S}$. Los valores numéricos de estos coeficientes se deducen fácilmente del hecho de que la línea S es paralela a $P_1 P_2$, esto es, a

$$(3 - 2)\,x + (4 - 1)\,y = 0$$

descubrimos que los coeficientes tienen la razón $1/4 : 3/4$. En la figura II.4 las estrategias óptimas forman un punto de silla, y son incluso más fáciles de encontrar. El valor del juego es la abscisa de $\overline{Q}$ en cada caso.

Estas consideraciones contienen implícitamente una prueba geométrica del teorema fundamental cuando uno de los jugadores tiene solamente dos estrategias puras. El próximo capítulo contiene una prueba algebraica que es de aplicación general.

CAPITULO III

Algebra de la teoría de los juegos

Introduciremos ahora una notación algebraica con objeto de obtener resultados generales.

Consideremos que A y B tienen n y m estrategias. El resultado de la combinación de la estrategia i de A y de la j de B lo designaremos por a_{ij}. Si A utiliza sus n estrategias puras en proporciones $x_1 \ldots : x_n$, siendo $x_1 + \ldots + x_n = 1$, designaremos esta estrategia mixta con la notación $(x) = (x_1 \ldots, x_n)$. De un modo similar una estrategia mixta de B se designa con la notación $(y) = (y_1 \ldots, y_m)$, donde $y_1 + \ldots + y_m = 1$. $x_1 \ldots, x_n$ e $y_1 \ldots, y_m$, son no-negativas. Debe tenerse esto en cuenta siempre que utilicemos las expresiones (x) ó (y).

Si A y B eligen, respectivamente, las estrategias (x) e (y), la esperanza matemática del jugador A es $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j A_{ij}$.

Consideremos ahora cómo deberán elegir las estrategias los jugadores A y B si adoptaran el punto de vista de la teoría de juegos. Si A elije la estrategia $(\bar{x})$, por ejemplo, debe temer que B elija la (y) que hace $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_i y_j A_{ij}$ lo más pequeño posible.

Pero si B puede elegir una estrategia mixta, él puede hacerlo, por lo menos de una forma con una estrategia pura, a causa de que la esperanza es una media ponderada de las cantidades $\Sigma \bar{x}_i A_{ij}$, con ponderaciones positivas y_j, cuya suma es la unidad y la esperanza, no puede ser inferior a el valor más pequeño de los $\Sigma \bar{x}_i A_{ij}$. De aquí que A necesite examinar las estrategias de B y observar para cada una de sus estrategias la que de la esperanza menor. Para una estrategia $(\bar{x})$ designamos esta esperanza mínima por:

$$\text{mín.}_{j} \sum_{i} A_{ij} \bar{x}_i = \sum_{i} A_{ij(\bar{x})} \bar{x}_i \qquad [1]$$

donde $j\ (\overline{X})$ representa la estrategia para la cual se obtiene el mínimo, cuando $(\overline{X})$ es la estrategia elegida por A.

A desea hacer este mínimo lo mayor posible. Por lo tanto, elegirá una estrategia (x) llamada "óptima" a la cual corresponde la esperanza mínima

$$\underset{(x)}{\text{máx}}\ \underset{j}{\text{mín}}\ \sum_{i} A_{ij}\, x_i = \underset{x}{\text{máx}} \sum_{i} A_{ij(x)}\, x_i = V_1 \qquad [2]$$

Consideramos V_1 como el "máximin" es evidente que el "máximin" "puro", es decir, $\underset{i}{\text{máx}}\ \underset{j}{\text{min}}\ Q_{ij} = U$ es igual o inferior a V_1; $U_1 \leq V_1$

Podemos repetir este argumento desde el punto de vista de B. Comenzamos por suponer que elige $(\overline{y})$ y entonces observa que A miraría de la mejor forma por sus intereses eligiendo aquella estrategia (x) que hace lo mayor posible la esperanza matemática

$$\underset{i}{\text{máx}} \sum_{j} A_{ij}\, y = \sum_{j} A_{i(\overline{y})}\, y_j \qquad [3]$$

en donde $i\ (\overline{y})$ es el índice de la táctica de A para la cual el máximo se alcanza cuando $(\overline{y})$ es la estrategia elegida por B.

B elegirá una estrategia (y) que llamaremos "óptima" que haga este máximo lo menor posible, es decir, igual a

$$\underset{(y)}{\text{mín}}\ \underset{i}{\text{máx}} \sum_{j} A_{ij}\, y_j = \underset{(y)}{\text{mín}} \sum_{j} A_{i(x)}\, y_j = V_2 \qquad [4]$$

V_2 recibe el nombre de "minimax".

De nuevo se pone de manifiesto que el "minimax" puro, es decir, $\underset{j}{\text{mín}}\ \underset{i}{\text{máx}}\ a_{ij} = V_2$ es superior o igual a V_2; $V_2 \leq U_2$.

Debe aclararse, que cuando hablamos de un máximo o de un mínimo, puede haber más de una estrategia que lo produzca, y cuando hacemos mención a "la" estrategia óptima, nos estamos refiriendo solamente a una cualquiera de ellas.

El teorema fundamental de la teoría de los juegos o Teorema Minimax (T, M, M) establece que siempre $V_1 = V_2$. Es fácil demostrar que $V_1 \leq V_2$, es decir, que el maximin nunca es mayor que el minimax. En efecto, consideramos las estrategias óptimas $(\bar{x})$ e $(\bar{y})$ definidas por las relaciones

$$V_1 = \min_j \sum_i a_{ij} \bar{x}_i$$

$$V_2 = \max_i \sum_j Q_{ij} \bar{y}_j$$

las desigualdades siguientes se deducen

$$V_1 \leq \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i \bar{y}_j < V_2$$

lo que establece que $V_1 \leq V_2$, será suficiente, pues para demostrar el teorema del minimax establecer además que $V_1 > V_2$, lo que realizamos en 3.2

Resulta de la relación $V_1 \leq V_2$ que $U_1 \leq V_1 \leq V_2 \leq U_2$ el maximin puro es igual, a lo más, al minimax puro (esto equivale a decir que existe un punto de equilibrio, como se demostrará en el párrafo 3.3), entonces $V_1 = V_2$.

Demostraremos el T. M. M en la próxima sección. Suponiendo su validez, deducimos de [1] y [3] que

$$V_1 = \sum_i a_{ij(\bar{x})} \bar{x}_i = \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i \bar{y}_j = \sum_j A_{i(\bar{y})j} \bar{y}_j \qquad [5]$$

Estas ecuaciones nos dicen que las dos estrategias $(\bar{x})$ e $(\bar{y})$, que se eligen para asegurar a A la mejor protección contra la estrategia pura de B $j\,(\bar{x})$, y a B la mejor defensa contra la táctica $i\,(y)$ de A, asegura así la mejor defensa del uno contra el otro. En consecuencia, si A elige $(\bar{x})$, B no necesita elegir $j\,(\bar{x})$ para incurrir en la menor pérdida posible, sino que puede igualmente elegir $(\bar{y})$, que generalmente será una estrategia mixta. Esto pudiera no ser cierto, a menos que cada estrategia pura que forma parte de $(\bar{y})$, diese conjuntamente con $(\bar{x})$ el mismo resultado que la estrategia pura $j(\bar{x})$.

Sin embargo, no es exacto decir que B puede hacer uso de $(\bar{y})$, ó $j(\bar{x})$ y quedan indiferente ante la elección de A. Por el contrario, únicamente puede pensar esto si B elige $(\bar{y})$, ya que de otro modo A podría obtener una ganancia superior al minimax V_2.

3.2. Demostración del teorema fundamental: Igualdad del maximin y minimax.

2. Llegamos ahora a la prueba del T. M. M. Se conocen actualmente muchas demostraciones. Históricamente la primera fué la proporcionada por von Neumann (Ref. 22), ésta no es la elemental y no es la misma dada por el mismo autor (Ref. 23). J. Ville dió una demostración elemental en 1938 (Ref. 27), sobre la cual hablaremos más adelante (Ref. 24). La que vamos a reproducir figura en el tratado de von Neumann y Morgenstern (págs. 153 y ss. Ref. 32). Otras demostraciones del teorema las daremos en (8.2) cuando nos ocupemos de la programación lineal, estableciendo un teorema más general: el teorema fundamental de dualidad. Nuestro objetivo es probar que $V_1 = V_2$ y sabemos que es suficiente demostrar que $V_1 \leqq V_2$.

La demostración se deduce de dos lemas que debemos demostrar primero.

Lema 1: El teorema de los hiperplanos de apoyo (T. H. A.). Supongamos dados los valores a_{ij} $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots m)$. Consideremos los elementos de cada columna $(a_{1j} \ldots a_{nj})$ como un punto A_j en un espacio n dimensional, y decimos que otro punto $A = a_1 \ldots a_n)$ de este espacio pertenece a la cápsula convexa de $A_1 \ldots A_m$, si podemos encontrar m valores no-negativos $t_1 \ldots t_m$ que suman la unidad de tal forma que para cada uno de los n índices $i = 1.2 \ldots n$ $a_i = t_1 a_{i1} + \ldots + t_m a_{im}$.

Esta cápsula es convexa, esto es, si dos puntos pertenecen a ella, todos los puntos sobre el segmento que determinan pertenecen a ella. El lector no tendrá dificultad en deducir esto de la misma definición.

El T. H. A. (en la forma en que lo necesitamos) establece que si el punto $0 = (0, 0, \ldots 0)$ no pertenece a la cápsula convexa determinada por los puntos $A_1 \ldots A_m$ se puede entonces encontrar va-

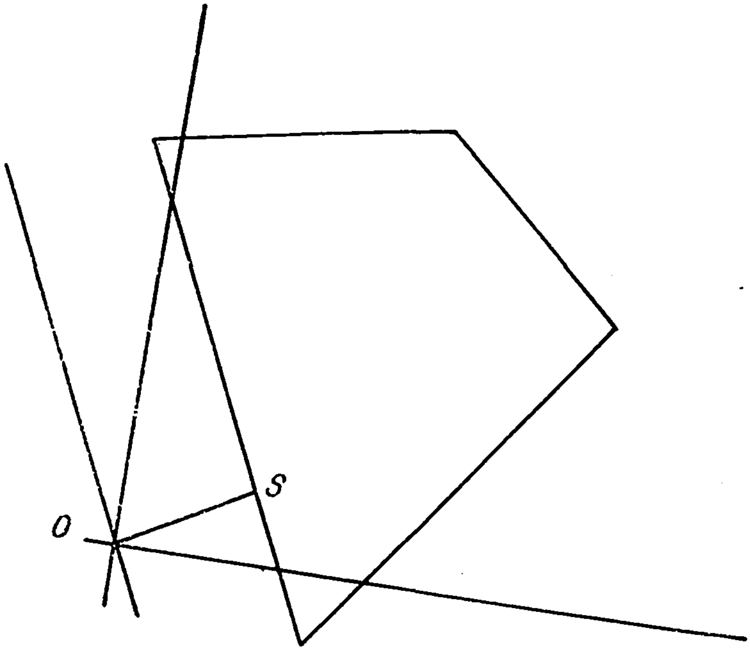

Fig. III.1

lores $S_1 \ldots S_n$ tales que para cualquier punto A perteneciente a la envoltura convesa ocurra que

$$S_1 A_1 + S_2 A_2 + \ldots + S_n A_n > 0$$

Para $n = 2$, 3 esto resulta evidente intuitivamente (V. Fig. III.1).

Estos casos especiales explican también el nombre del teorema, ya que un hiperplano es la generalización de las nociones de recta y plano a dimensiones más elevadas.

Demostraremos el lema para el caso en que n sea cualquiera.

Si 0 no pertenece a la cápsula convexa C, hay entonces en C un punto diferente de 0, para el que el cuadrado de la "distancia desde 0", esto es, la suma de los cuadrados de las coordenadas de C, es mínima. Consideremos que éste es el punto S. (S_1, S_2, S_n). Supongamos ahora un punto arbitrario de C, $A = (a_1 \dots a_n)$. Para cada t entre 0 y 1, el punto con coordenadas $[t\, a_i + (1 - t)\, S_i]$ también pertenecería a C. Por otra parte, su distancia al punto 0 es por lo menos igual a la del punto S, esto lleva consigo para $0 \leqq t \leqq 1$

$$\sum_i [t\, a_i + (1 - t)\, S_i] \geqq \sum_i S_i^2$$

Se deduce por álgebra elemental que si $0 < t < \frac{1}{2}$

$$2 \sum_i S_i (a_i - S_i) + t \sum_i (a_i - S_i) > 0$$

Si t tiende a 0, la ecuación tiende a

$$\sum_i S_i (a_i - S_i) > 0$$

$$\sum_i S_i\, a_i > \sum S_i^2 > 0$$

(ya que S es distinto de 0). El lema I queda establecido.

2. El teorema de la alternativa para matrices (T. A. M.)

Dados los valores a_{ij} de la matriz de juego consideramos la cápsula convexa C de los puntos $A_1 \dots A_m$ (definida como antes) y de los n puntos $I_1\,(1, 0 \dots 0)$ $I_2\,(0, 1, 0, \dots 0) \dots I_n\,(0, 0, \dots 0, 1)$.

El punto I_0, o bien pertenece a C o no. El T. A. M. establece que en el primer caso existe una (y) tal que para cada uno de los n índices $i = 1, 2, \dots n$

$$a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + \dots + a_{im}\, y_m \leqq 0 \qquad [1]$$

y que en el segundo caso hay alguna estrategia (x) tal que

$$a_{1j}\, x_1 + \dots a_{nj}\, x_n > 0 \quad \text{para todo } j_{(II)}$$

Caso I. El punto 0 pertenece a C, es decir, existen $m + n$ valores t_1, t_2) $\dots t_{m+n}$ todos no-negativos y de suma igual a la unidad tal que, para cada uno de los n índices $i = 1, 2, \dots n$ o

$$t_1\, a_{i1} + t_2\, a_{i2} + \dots + t_m\, a_{im} + t_{m+i} = 0$$

$$t_1\, a_{i1} + t_2\, a_{i2} + \dots + t_m\, a_{im} = - t_{m+i} \leqq 0$$

$t_1 + \dots + t_m$ son positivos, dado que de otro modo todas las t_i (i = = 1, ... $m + n$) serían cero y no podrían sumar 1.

Se deduce de aquí que basta elegir

$$y_j = t_j/(t_1 + t_2 + \ldots + t_m) \quad \text{con} \quad j = 1, 2, \ldots m$$

Para obtener una estrategia (y) que satisfaga [I] lema I.

Caso II. Fig. III. 1. El punto 0 no pertenece a C_1 por el existen n coeficientes $S_1, S_2, \ldots S_n$ tales que para cada uno de los m índices $j = 1, 2, \ldots m$

$$S_1 a_{1j} + \ldots + S_n a_{nj} > 0 \quad \text{con} \quad S_1 > 0 \ldots S_n > 0$$

(ya que los puntos (1, 0 ... 0) etc. pertenecen también a C). En consecuencia basta elegir los valores $x_i = S_i/(S_1 + \ldots + S_n)$ para obtener una estrategia (x) que satisfaga (ii). Esto prueba el lema 2.

Teorema fundamental. Igualdad del máximin y mínimax

El lema anterior se utilizará para probar el teorema fundamental. En el caso primero, anteriormente estudiado, existía una estrategia (y) tal que $\Sigma a_{ij} y_j \leq 0$ para cada uno de los valores de i y de aquí que

$$\max_i \sum_j a_{ij} y_j \leq 0$$

Por tanto

$$V_2 = \min_{(y)} \max_i \sum_j a_{ij} y_j \leq 0$$

En el segundo caso existe una estrategia (x) tal que

$$\sum_i a_{ij} x_i > 0$$

para cada uno de los valores de j y de aquí que

$$\min_j \sum_i a_{ij} x_i > 0$$

Por consiguiente

$$V_1 = \max_{(x)} \min_j \Sigma a_{ij} x_i > 0$$

Así hemos demostrado que no es posible que simultáneamente $V_1 \leq 0$ y $V_2 > 0$. Consideremos ahora la matriz de resultados que tiene como elementos $(a_{ij} - k)$ en donde k es una constante arbitraria, positiva o negativa. La demostración anterior aplicada a esta matriz, establece que no es posible que $V_1 \leq k < V_2$ sea k lo que fuere. Por lo tanto V_1 nunca puede ser más pequeña que V_2 lo que prueba el teorema fundamental T. M. M.

A causa del gran interés matemático de este teorema, destacábamos anteriormente la demostración de J. Ville. Se sigue de (4) que

$$\max_i \sum_j a_{ij} y_j \geq V_2$$

para todas las (y). En otras palabras, para cada (y) hay por lo menos un índice i tal que

$$\sum_j a_{ij} y_j \geq V_2$$

Se demuestra en la (Ref. 27) que es posible encontrar una $(\bar{x})$ tal que

$$\sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i y_j \geq V_2$$

para toda (y). Se sigue que

$$V_2 \leq \min_y \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j \leq \max_{(x)} \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_i =$$

$$= \max_x \min_j \sum_i a_{ij} x_i = V_1$$

3. En I. 3 introducimos el concepto de "solución" de un juego. Damos ahora una definición precisa de esto sobre líneas bastante diferentes, que como luego demostraremos son equivalentes a las seguidas en I. 3.

Cualquier par de estrategias $\overline{(x)}$ e $\overline{(y)}$ es una solución del juego (a_{ij}) si

$$\sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i \bar{y}_j = \max_{(x)} \min_j \sum_i a_{ij} x_i =$$

$$= \min_{(y)} \max_i \sum_j a_{ij} y_j = V_2$$

Nada de lo que hemos dicho conduce a la conclusión de que solamente puede haber una solución para cada juego. Pero dado que sólo puede haber un máximin o mínimax, es evidente que todas las soluciones llegan al mismo valor $V = V_1 = V_2$, el valor del juego.

Consideremos ahora que $(\bar{x})$ $(\bar{y})$, y $(\bar{\bar{x}})$ $(\bar{\bar{y}})$ son soluciones. Entonces $(\bar{x})$ e $(\bar{\bar{y}})$ es también una solución en virtud de la definición de solución

$$\sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i \bar{\bar{y}}_j \geqq \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i \bar{y}_j \geqq \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{\bar{x}}_i \bar{y}_j$$

y también

$$\sum_i \sum_j a_{ij} \bar{\bar{x}}_i y_j \geqq \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i \bar{y}_j \geqq \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{x}_i \bar{\bar{y}}_j$$

Se sigue que todos los términos en estas desigualdades deben tener el mismo valor.

Consideremos ahora la siguiente cuestión de importancia práctica. Dadas dos estrategias (x') e (y') ¿Cómo puede probarse si son una solución de un juego determinado?

Si (x') e (y') son una solución, necesariamente deba cumplirse

$$(a) \qquad \sum_i \sum_j a_{ij} x'_i y'_j \leqq \sum_i \sum_j a_{ij} x'_i y_j \quad \text{para todo } (y)$$

$$(b) \qquad \sum_i \sum_j a_{ij} x'_i y'_j \geqq \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y'_j \quad \text{para todo } (x)$$

Estas dos desigualdades son también suficientes para que (x') (y') sean una solución, como demostraremos a continuación. Consideramos que si ambos jugadores han elegido sus estrategias y ninguno de ellos se encuentra mejor fuera de esa elección siempre que el otro mantenga invariable la suya, entonces son una solución. La demostración es como sigue:

De (a) y (b) tenemos. Fórmula (c)

$$\max_{(x)} \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y'_j = \sum \sum a_{ij} x'_i y'_j = \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij} x'_i y_j$$

Pero claramente tenemos también

$$(d) \qquad \min_{(y)} \max_{(x)} \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j \leqq \max_{(x)} \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y'_j$$

$$(e) \qquad \max_{(x)} \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j \geqq \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij} x'_i y_j$$

A causa de que los términos de la izquierda de (*d*) y (*e*) son iguales, deben ser iguales también al término central de (C). Esto completa la demostración. Asimismo, nos dice que la definición de solución dada aquí es equivalente a la 1.3.

Si el juego tiene un punto de silla, esto es, si podemos encontrar estrategias puras (x_0) e (y_0) que satisfagan (*a*) y (*b*), se deduce entonces de (*c*), (*d*) y (*e*) que el valor del juego es igual al máximo de la fila mínima y también al mínimo de la columna máxima. Para una matriz de juegos muy grande esto proporciona un criterio más conveniente para determinar la existencia de un punto de silla que una investigación a través de la matriz completa.

4. Si un juego no tiene punto de silla, entonces la determinación de una solución o de su valor no es tarea fácil. Diferimos esta cuestión a la última parte del libro, porque será contestada por un método de cálculo más sistemático que soluciona un problema más general. Este se introduce ahora.

Consideremos una matriz de juego dada. Si A elige (x) puede pensar acertadamente que obtendrá por lo menos

$$\min_j \sum_i a_{ij} x_i = V^1$$

Tenemos, por lo tanto,

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \dots + a_{nj} x_n \geq V^1 \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots m$$

con

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \dots \quad x_n \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

A quiere hacer V^1 lo mayor posible (V^1 maximin será entonces el valor del juego). Este valor no es necesariamente positivo, pero lo será si añadimos una constante a todas las a_{ij} de forma que las hagamos todas positivas. Ello aumenta el valor del juego en la misma constante, pero no cambia la solución. Podemos, por tanto, suponer que V^1 es positiva e introducir las nuevas variables $x_i = x_i/V^1$ que como las x_1 toman valores no-negativos. Dividiendo las desigualdades precedentes por V^1 obtendremos el sistema $a_{1j} x'_1 + a_{21} x'_2 + \dots + a_{nj} x'_n \geq 1$ para $j = 1 \dots m$ con

$$x'_1 \geq 0 \, x'_2 \geq 0 \dots x'_n \geq 0$$

$$x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n = \frac{1}{V'}$$

El término a la derecha de la segunda ecuación debe minimizarse.

Repitiendo este argumento para B, obtenemos

$$a_{i1} y'_1 + a_{i2} y'_2 + \dots + a_{im} y'_m \leqq 1 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots n \quad \text{con}$$

$$y'_1 \geqq 0 \quad y'_2 \geqq 0 \dots y'_m \geqq 0 \quad \text{con} \quad y'_1 + y'_2 + \dots y'_m = \frac{1}{V''}$$

$$y'_1 + y'_2 + \dots y'_m \text{ ha de hacerse máximo}$$

Hemos llegado a la conclusión que el problema de los juegos puede reducirse a un caso especial de un problema más general, que puede expresarse como sigue:

Consideremos las constantes a_{ij}, b_j y c_j, $i = 1 \dots n$ y $j = 1 \dots m$. Hay que encontrar valores no-negativos x_i e y_j tales que $\sum_i a_{ij} x_i \geqq b_j$ para los valores de j haciendo $\sum_i c_i x_i = C$ lo más pequeño posible y $\sum_j a_{ij} y_j \leqq c_i$ para los valores de i haciendo $\sum_j b_j y_j = B$ lo mayor posible

Los dos problemas son, respectivamente generalizaciones de los que los jugadores A y B tienen que resolver y están relacionados entre sí. Se dice que esos problemas presentan entre sí una relación de dualidad. Se demostrará (en VIII.3) que el máximo de $\sum_{(y)} b_5 y_5$ es igual al mínimo de $\sum_{(x)} c_i x_i$. Esto es, en el caso especial de la teoría de los juegos, equivalente al (T. M. M.).

Otra forma de reducir el problema de los juegos a uno de P.L se indica en el cap. IX.1.

5. En tanto en cuanto consideramos únicamente estrategias puras, los resultados constituyen un grupo discreto. Con la introducción de estrategias mixtas, esto no es cierto. Podemos considerar ahora que A tiene a su disposición un conjunto infinito de estrategias

$$X_j (x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_i a_{ij} x_i \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots m$$

$$Y_i (y_1 y_2 \dots y_m) = \sum_j a_{ij} y_j \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots n$$

El resultado que se obtiene de dos estrategias cualquiera es

$$P(x_1\, x_1 \ldots x_n :\; y_1\, y_2 \ldots y_m) = \sum_j x_j\, y_j = \sum_i y_i\, x_i = \sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, y_j$$

Si consideramos una función de pago $A_{00} + A_{01}\,x + A_{10}\,y + A_n\,x\,y$ en donde x e y toman valores entre 0 y 1, este juego es entonces equivalente a uno discreto finito, en el que los jugadores tienen dos estrategias cada uno. Pero podemos llevar a cabo una ulterior generalización suponiendo para x e y algunas funciones no necesariamente lineales y para P otra función no necesariamente bilineal. En casos todavía más generales, por ejemplo, cuando la función P no es continua, nuestra prueba del T. M. M. pierde validez. No podemos entrar aquí en más detalles, diremos no obstante que J. Ville (Ref. 27) ha demostrado que un teorema análogo al T. M. M. se verifica si P es una función continua de dos variables en el dominio $0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$ (v. también ref. 20, pág. 186) se consideran casos más complicados en las Refs. 16 y 17.

Finalmente, mencionamos que un tratamiento completo de la teoría se expone en los dos primeros capítulos de la Ref. 4, aunque hay que decir que no es un libro para principiantes.

CAPITULO IV

Una idea de la programación lineal

El término Programación Lineal (P. L.) describe la solución del siguiente problema:

Consideremos un grupo de ecuaciones o "condiciones" dadas en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + \ldots + a_{n1}\,x_n &= b_1 \\
a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{n2}\,x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{1m}\,x_1 + a_{2m}\,x_2 + \ldots + a_{nm}\,x_n &= b_m
\end{aligned} \qquad [1]$$

Se necesita encontrar valores no-negativos de las variables

$x_1 \ldots x_n$ que satisfagan las condiciones anteriores y hagan el valor de una forma lineal

$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad [2]$$

tan pequeño como sea posible.

Podemos suponer que las ecuaciones 1 son linealmente independientes, ya que, de otro modo, podríamos eliminar una o varias de ellas.

El mismo problema, pero sin la condición de que las variables sean no-negativas, puede transformarse en el anterior por el cambio de variable $x_i = x'_i - x''_i$. Con $x'_i \geqq 0\ x''_i \geqq 0$ la forma anterior es también adecuada para representar el caso en que alguna o todas las ecuaciones se remplacen por desigualdades, dado que

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \ldots + a_{nj} x_n \leqq b_j$$

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \ldots + a_{nj} x_n \geqq b_j$$

es equivalente a

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \ldots + a_{nj} x_n - x_{n+j} = b_j$$

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \ldots + a_{nj} x_n + x_{n+j} = b_j$$

con la condición de que x_{n+j} sea también no-negativa. Llamamos estas variables x_{n+j} "adicionales".

Si fuese nuestro objetivo el hacer máxima una F. L. determinada, entonces reduciríamos este problema al anterior, haciendo que el negativo de la F. L. se minimizase. En este caso debemos cambiar el signo del valor mínimo de la F. L. minimizada para obtener el valor máximo de la F. L. original que deseábamos fuese máxima. Alternativamente, podríamos considerar el problema de maximización como un problema autónomo. Hablaremos en vista de esto de "optimización" cuando nos refiramos a la maximización o minimización. Hemos visto en el último capítulo que una formulación algebraica del problema de los juegos conduce a la P. L. Daremos ahora ulteriores ejemplos que muestran que la habilidad para operar con un problema de P. L. puede hacerla útil en una gran variedad de situaciones.

Quizás el primer problema de este tipo que aparecido en la literatura se debe a F. L. Hichcock (Ref. 12, ver también Ref. 14 y el cap. XXIII de Ref. 15 por G. B. Dantzig). Suponemos que hay a_S Barcos en los puertos P_S y que deseamos enviarlos a unos puertos de destino Q_t de forma que b_t de ellos se trasladen al puerto de destino Q_t. Suponemos que si nos importa dónde va el barco, es porque el coste de movilizar un barco de uno a otro puerto es diferente para distintos pares de puertos.

Designaremos al número de barcos que han de moverse eventualmente de P_s a Q_t por y_{st} y suponemos que el coste de mover así un barco se conoce y es c_{st}. Nuestro objetivo es hacer que el proceso de movimiento sea lo más barato posible, esto es, minimizar

$$\sum_s \sum_t c_{st}\, y_{st}$$

con las condiciones

$$\sum_t y_{st} = a_s \quad \text{para} \quad s = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_s y_{st} = b_t \quad \text{para} \quad t = 1, 2, \ldots n$$

recordando que las y_{st} deben ser no-negativas. Si tenemos también información sobre el coste de transporte entre puertos de la misma categoría y quizás hacia y desde puertos intermedios que no son P ni Q, podremos considerar la posibilidad de transbordo, es decir, pasar por puertos intermedios. Sin embargo, el coste de almacenaje y de entrada en muelle, deben considerarse en ese caso.

Este problema de transporte, al menos en su forma más simple, es idéntico formalmente al de distribuir n personas entre n empleos, de tal forma que su valor total se maximice, cuando se conocen los rendimientos individuales de cada persona en cualquier empleo.

Un problema en otro dominio bien diferente es el siguiente: V ha oído que necesita por lo menos b_1 unidades de grasa, b_2 de proteínas y b_3 de hidratos de carbono por semana para estar fuerte y sano y V sabe también las unidades de los varios ítems de alimentos, es decir, F_i contiene respectivamente a_{ij} $(j = 1, 2, 3)$ unidades de estos ingredientes. V desea comprar alimentos con el menor gasto total, pero de tal modo que se cumplan las exigencias nutritivas. Si entonces C_i es el precio de una unidad de F_i y x_i la cantidad que V compra de ella, V quiere minimizar $\Sigma\, c_i\, x_i$ sometida a las condiciones $\Sigma\, a_{ij}\, x_i > b_j$ para $j = 1, 2, 3$. Hemos introducido el signo $>$ porque puede ocurrir que sea más barato comprar algún ítem que dé con exceso el mínimo exigido. (Cf. Ref. 25).

Las variaciones de este problema pueden ser más reales que esta forma simple que acabamos de exponer. Por ejemplo, a V le puede no gustar tener una alimentación demasiado fuerte en féculas y puede estar dispuesto a pagar más otros alimentos para limitar la cantidad de ellos. En un problema relativo al aprovisionamiento marítimo puede argüirse que lo que importa no es la economía en el coste, sino más bien en el peso o volumen, y lo que se debe minimizar es la provisión excesiva que representa la diferencia entre los dos miembros de las desigualdades anteriores.

Los modelos de P. L. se aplican a muchos más problemas. Un propietario de almacenes quiere comprar cuando los precios son más bajos y vender cuando son más elevados, pero su capacidad de almacenaje es limitada y esta restricción afecta a las distintas mercancías de diferente forma (Ref. 6); hay diferentes formas en las que la combinación de petróleo puede satisfacer distintas exigencias y el coste y los precios de venta para los diferentes productos son también diferentes. (Ver Ref. 10.) Puede desearse comenzar una campaña de publicidad y seleccionar diversos medios cuya eficiencia es expresable en términos cuantitativos, se puede querer minimizar el coste o por el contrario para maximizar el efecto con un determinado coste total. Ejemplos similares se pueden ver en la Ref. 15.

La mayor parte si no todos estos ejemplos tienen un matiz económico y mencionamos un ejemplo final de la teoría de la empresa (Ver Ref. 11). Suponemos que una empresa puede utilizar varios procesos de producción P_j ($j = 1, 2, \ldots m$) y que su intensidad puede medirse. Suponemos también que la intensidad es tal que cuando se multiplica por una constante, las exigencias para todos los materiales R_i utilizados en el proceso se multiplican por el mismo factor. Denominamos la cantidad de R_i necesitada en P_j cuando su intensidad es la unidad, por a_{ij}. Entonces si P_j sí se utiliza al nivel de intensidad (no-negativo) y_j la exigencia que aparece para R_i es

$\sum_j a_{ij} y_i$. Si el beneficio del producto del proceso P_j al nivel unidad es p_j, podemos imaginar que la empresa trata de utilizar sus variados métodos de producción a niveles tales que el beneficio total $\sum_i p_j y_j$ sea maximizado, sometido al hecho de que no más que t_i es útil de R_i, esto es, sometido a

$$\sum_i a_{ij} y_i \leqq t_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots u$$

Hemos supuesto que el beneficio de las ventas es proporcional a la cantidad vendida y que la cantidad de material bruto necesario para cualquier proceso es proporcional a su nivel. De aquí el nombre de programación (proporcional) lineal. En la literatura moderna este término ha sido reemplazado por Análisis de Actividades de la Producción y Distribución (el título de la Ref. 15), pero nosotros nos hemos inclinado como nombre conveniente por el de programación lineal. (Para ulteriores ejemplos consultar Ref. 19). Los economistas tendrían que hacer sin duda muchas sugerencias sobre la validez de los modelos, pero nosotros no queremos entrar en su terreno.

Podría quizá pensarse, por un momento, que semejantes problemas podrían solucionarse utilizando el cálculo diferencial. Sin embargo, veremos muy pronto que las soluciones que hemos elegido se encuentran en general no en puntos donde alguna derivada es cero, sino en puntos sobre la frontera de la región definida por las diferentes condiciones impuestas a las variables, comprendida la de ser no-negativas. Es claro que se necesitan técnicas especiales para resolver eficientemente estos problemas.

2. Antes de mostrar cualquiera de los métodos que han sido adoptados por la P. L., es interesante contestar una pregunta que puede plantearse en conexión con problemas prácticos tales como el de la publicidad que hemos mencionado. Supongamos primero que se dan m condiciones y que es necesario minimizar una F. L., C. Podemos considerar a C como el coste de un proceso y el miembro de la derecha de la primera ecuación a condiciones es decir b_1 como el beneficio cuya cantidad ha sido fijada, mientras que el resto de las m-1 ecuaciones de condición representan determinadas condiciones. Se puede entonces preguntar, después de haber determi-

nado el mínimo del costo, si no hubiese sido posible obtener un beneficio superior a b_1, partiendo C de un puente de fondos igual a este valor mínimo de C. (Ver Ref. 2 a, Apéndice al primer artículo.)

Hagamos abstracción de la primera ecuación de condición y consideremos todos los valores del beneficio b_1 y el coste C compatibles con las $(m\text{-}1)$ restantes ecuaciones de condición. La linealidad de las expresiones b_1 y C y la de todas las ligaduras de las variables llevan consigo que los puntos de abscisa b_1 y ordenada C definidas en un plano cartesiano forman un dominio convexo. En efecto, si los puntos $(b'_1\ C')$ y $(b''_1\ C'')$ corresponden respectivamente a los valores x'_i y x''_i de las variables x_i los puntos $[tb'_1 + (1 - t)\ b''_1$ y $t\,C' + (1 - t)\ C'']$ del segmento de recta que los une $[0 \leq t \leq 1]$ corresponden a los valores $[t\,x'_i + (1 - t)\ x''_i]$ que, como las x'_i y x''_i satisfacen a todas las condiciones, ya que $t \geq 0$ y $1 - t \geq 0$.

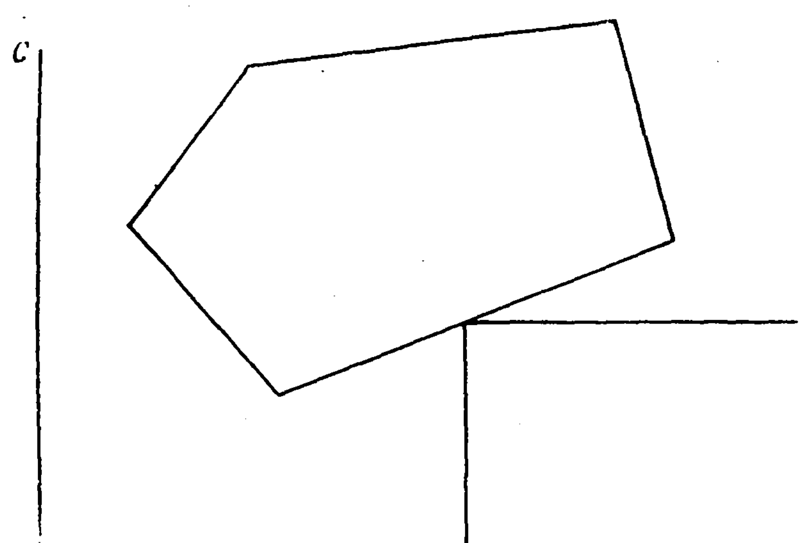

FIG. IV.1

Para una b_1 determinada el valor más pequeño de C será la ordenada más pequeña de la intersección del dominio convexo considerada y la vertical de abscisa b_1. Se deduce que para que sea imposible obtener un beneficio superior a b_1 con unos costes C iguales al mínimo correspondiente a b_1 es suficiente, en el caso general que el valor dado b_1 sea por lo menos igual a la abcisa del punto más bajo de este dominio convexo (es decir el punto correspondiente al coste C mínimo teniendo en cuenta las (m-1) ecuaciones de condición restantes), siendo a lo más igual a la abscisa del punto más a la derecha (es decir el punto correspondiente al beneficio b_1 máximo).

El caso particular en que el dominio convexo en vez de un punto mínimo tenga un lado horizontal es obvio.

3. Las diferentes técnicas de cálculo para solucionar el problema de la P. L. difiere por la forma con que se alcanza la meta. En este capítulo, en principio, procedemos buscando un grupo de valores no-negativos $x_1 \ldots x_n$ que satisfagan las condiciones; solamente entonces trataremos de averiguar si otros valores no negativos de las variables producen un valor más pequeño de C. En los capítulos VIII y XI introducimos métodos en los que partimos de valores que no son necesariamente no-negativos y buscamos valores que sean todos no-negativos.

El número de ecuaciones m, será en general más pequeño que el número de variables n; pero incluso así no podemos estar seguros de que exista una solución no-negativa. Esto se aclara con el siguiente ejemplo, consideramos las condiciones $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 - x_3 = 2$. Por sustracción obtenemos $x_2 + x_3 = -1$, que no admite solución posible con valores no-negativos.

Para hacer la siguiente discusión más sencilla, introducimos los siguientes términos:

Una "solución" es cualquier grupo X_i que satisface todas las ecuaciones de condición; los signos de las variables no se tienen en cuenta, así como tampoco la forma lineal que hay que hacer óptima.

Una solución "posible" (s. p.) es una solución con las x_i no-negativas. Una "base" es un grupo de "m" variables tales que la matriz de sus coeficientes en las "m" ecuaciones de condición no es singular. Estas "m" variables son "variables básicas" (v. b.) relativas a las bases y otras son "variables no-básicas" (v. n. b.) La solución básica asociada con una base se obtiene haciendo las v. n. b.

iguales a cero y resolviendo las ecuaciones de condición para las "variables básicas".

Una "solución posible básica" (s. p. b.) es una solución básica que es también posible.

Estaría más de acuerdo con el álgebra designar con la palabra base el sistema de m vectores con m componentes definidos, respectivamente, por las m columnas de la matriz cuadrada no singular de que acabamos de ocuparnos, pero nosotros encontramos conveniente utilizar este término para el grupo de las m variables correspondientes.

4. El primer procedimiento a explicar es el llamado Método del Simplex (M. S.) debido a G. B. Dantzig (Ref. 15, cáp. XXI). El nombre deriva del hecho de que uno de los primeros ejemplos que hubo de resolverse por este método contenían la condición $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ que, junto a las condiciones $x_i \geqq 0$, define un "simplex" en geometría n-dimensional. El nombre se utiliza ahora para el procedimiento cualquiera que sea la forma de las ecuaciones de condición (lineales).

En este método las etapas son las siguientes:

Primero, encontramos una s. p. b. determinamos entonces si el óptimo ha sido ya logrado, si no, entonces suprimimos una de las v. b. de la base e introducimos en su lugar otra variable. La nueva base es tratada de la misma forma y se repiten las etapas si fuera necesario. Se demuestra que este proceso debe terminar eventualmente, ya produciendo el óptimo o demostrando que las exigencias son contradictorias, o que los valores de la F. L., que pueden presentarse, no están acotados (por abajo si la F. L. ha de ser minimizada, o por arriba en el caso opuesto).

Un ejemplo simple del caso últimamente mencionado nos lo da hacer máximo $c = x_1 + x_2$ con la condición $x_1 - x_2 = 0$ para x_1 y x_2 no-negativas.

Admitiremos por ahora que el examen de las ecuaciones de condición, o la naturaleza física del problema permiten encontrar una solución básica a partir de la cual el proceso de cálculo pueda desarrollarse. De otra forma, surgen complicaciones, de las que se ocupa el capítulo VII.

Un ejemplo ayudará a aclarar el principio del método. Consideramos formulado el problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Minimizamos $x_2 - x_1 = C$ para las x_i no-negativas. Las condiciones pueden, por ejemplo, considerarse que proviene de desigualdades, ya que cada una de las x_3, x_4 y x_5 aparecen solamente en una de las ecuaciones.

En este caso, es fácil ver, por inspección, que una s. p. b. viene dada por $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. Podemos expresar las variables que forman la base en función de las otras variables

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 &= 5 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Podemos también expresar C en función de las v. n. b. Pero esto está ya hecho: $C = -x_1 + x_2$.

Veamos seguidamente si el mínimo de C ha sido ya logrado. El coeficiente de x_1 en la expresión para C es negativo. En consecuencia, un aumento de x_1 disminuirá C. Pero si aumentamos x_1, entonces x_3, x_4 y x_5 cambiarán, y debemos tener cuidado de no hacer negativa cualquiera de estas variables.

Para x_3 este peligro no existe por ahora, porque un aumento de x_1 aumentaría también x_3. Considerando las otras variables, descubrimos que x_1 puede aumentarse hasta 2, lo que hace $x_4 = 0$, $x_3 = 6$ y $x_5 = 3$. Este resultado es completamente aceptable, ya que el número de variables positivas es nuevamente de tres, como antes.

La nueva base está integrada ahora por x_1, x_3 y x_5. Para comenzar con la nueva etapa expresamos estas variables y C, en términos de las v. n. b. x_2 y x_4. Esto se hace fácilmente resolviendo la segunda ecuación para la nueva variable x_1, así:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - 2x_4 + 3x_2 \\ x_1 &= 2 - x_4 + 2x_2 \\ x_5 &= 3 + x_4 - 3x_2 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la otra ecuación

$$C = -2 + x_4 - x_2$$

Podemos disminuir C, aumentando x_2 advertimos también que solamente x_5 está en peligro de llegar a ser negativo a través de un excesivo aumento de x_2 y que la última variable puede aumentarse hasta 1, sin causar ninguna extorsión, pero no más. La sustitución en las otras ecuaciones da $x_1 = 4$ y $x_3 = 9$. $x_2 = 1$.

Una vez más expresamos las v. b. y C por las v. n. b.:

$$x_3 = 9 - x_4 - x_5$$

$$x_1 = 4 - \frac{1}{3} x_4 - \frac{2}{3} x_5$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{3} x_4 - \frac{1}{3} x_5$$

$$C = -3 + \frac{2}{3} x_4 + \frac{1}{3} x_5$$

Un aumento de x_4 ó x_5 no disminuiría C y, por tanto, hemos logrado la solución final. El mínimo valor obtenible para C es -3 y es producido cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 9$.

5. Es claro que al realizar los cálculos no es necesario incluir todo lo que ponemos por escrito para una comprensión más adecuada. El proceso que hemos llevado a cabo puede expresarse igualmente bien en una serie de cuadros, de la forma siguiente:

			x_1	x_2
			-1	1
	x_3	2	-2	1
	x_4	2	1^*	-2
	x_5	5	1	1
		0	1	-1

			x_4	x_2
				1
	x_3	6	2	-3
-1	x_1	2	1	-2
	x_5	3	-1	3^*
		-2	-1	1

			x_4	x_5
	x_3	3	1	1
-1	x_1	4	1/3	2/3
1	x_2	1	$-1/3$	1/3
		-3	$-2/3$	$-1/3$

Para formar cada uno de estos cuadros, es cómodo imaginar los términos constantes aislados en los segundos miembros en las ecuaciones que expresan las variables básicas y la forma lineal C en función de las variables no principales o básicas. Todas las variables figuran en los primeros miembros de las ecuaciones y cada una de las variables básicas, lo mismo que C figura con el coeficiente 1 en la única ecuación que la expresa.

El cuadro precedente reproduce los coeficientes que afectan a las variables no básicas en las ecuaciones, así como los términos constantes escritos en los segundos miembros. Cada una de las líneas se refiere a una de las variables principales (cuyo nombre figura a la izquierda) salvo la última, que se refiere a la forma lineal C. Cada una de las columnas contiene los coeficientes que afectan a cada una de las variables no básicas (cuyo nombre figura arriba) salvo la primera, que contiene los términos constantes, es decir, los valores tomados por las variables básicas y por la forma lineal C en las soluciones básicas al que corresponde el cuadro.

Por último, los coeficientes que figuran a la izquierda de las variables básicas o inmediatamente debajo de ciertas variables no principales, son con los coeficientes con que estas variables están afectados en la expresión inicial de C. Las otras cifras son los coeficientes de las v. n. b. La inclusión de los coeficientes originales en C permite una comprobación útil, porque, como veremos en el próximo capítulo, obtenemos el valor básico de cada columna multiplicando cada cifra de aquella columna por el coeficiente c_i en la misma fila y restando de la suma el valor c_j de la columna. (Por ejemplo, en el último cuadro, la última columna, $-2/3 + 1/3 = -1/3$ o en la última columna del segundo cuadro $(-1)\ (-2) - 1 = 1$.

En cada paso decidimos incluir en la base la v. n. b. para la cual la cifra en la base del cuadro tenga signo positivo (o signo negativo, si deseamos maximizar la F. L.) y remover de la base aquella variable (o una de ellas en caso de ambigüedad) que tenga el cociente más pequeño entre el término constante colocado en la primera columna y el coeficiente de la variable básica que se va a introducir en la base (por ejemplo, en el primer cuadro x_1 se hace básica, y dado que $2/1$ es más pequeño que $5/1$, x_4 se hace no básica). Se introduce este coeficiente en la columna de la variable, y la fila de la variable que hay que retirar de la base se llama "punto fundamental", "eje" (pivote), y se marca por un asterisco.

La transformación de un cuadro en el próximo puede hacerse también por un simple procedimiento que se describirá en el capítulo VI.

6. Si se opera con problemas específicos que pueden solucionarse con la P. L. entonces es de utilidad saber algunas características especiales para aplicarlas a algún caso particular. Así es fácil demostrar que, si el problema del transporte se soluciona por este método, los coeficientes de las v. n. b. serán en todas las ecuaciones y etapas 0, ó —1. De aquí que el punto fundamental es siempre 1, y los números de barcos que ha de moverse sobre rutas determinadas serán siempre enteros (Ref. 14, cap. XXIII, por G. B. Dantzig).

Por consiguiente, los problemas que pudieran solucionarse por la P. L. tienen a menudo características especiales que permiten utilizar conjuntamente diferentes métodos y ciertamente no deseamos sugerir que los métodos generales que nosotros describimos son los mejores en todas las circunstancias. El problema del transporte tiene una estructura tan simple que se han propuesto para su solución métodos especiales que pueden llevar más rápidamente al resultado requerido.

CAPITULO V

Representación gráfica de la P. L.

Para lograr una visión total del problema de la P. L. y para apreciar también la naturaleza de las complicaciones que puedan surgir, el lector encontrará en este capítulo una representación geométrica en dos dimensiones, que es aplicable a las desigualdades en dos variables o, lo que viene a ser lo mismo, a ecuaciones cuyo número es inferior en dos unidades al de variables.

Consideremos el ejemplo (IV.4) al que en este capítulo consideraremos como ejemplo 1. El gráfico geométrico más natural es el cartesiano rectangular con ejes x_1 y x_2. Dado que estas coordenadas no deben tomar valores negativos, solamente tiene interés el primer cuadrante del plano. Habiendo resuelto las ecuaciones de condición para las v. b. en el ejemplo para x_3, x_4 y x_5, consideramos las rectas cuyas ecuaciones respectivas se obtienen por anulación de estas variables. Todas las variables deben ser no-negativas, cada una de estas rectas limita en el plano x_1 x_2 un semiplano significativo.

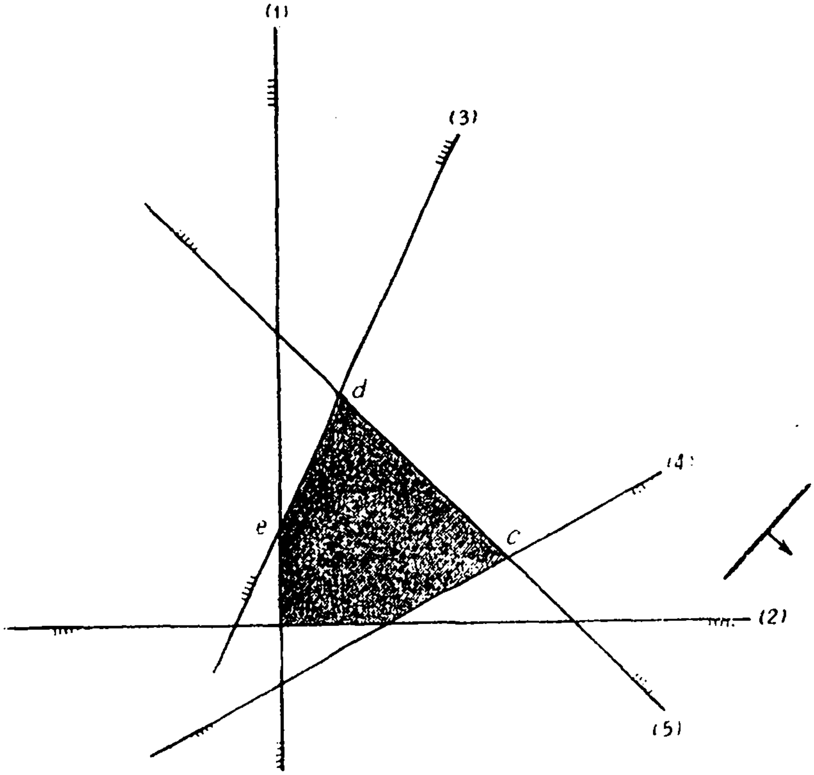

Fig. V.1

En la fig. V.1 se trazan las líneas, y la parte sombreada indica los puntos que son posibles. Por una analogía fácilmente comprensible hablaremos de vértices, puntos interiores, etc.

Observamos que solamente el polígono $a\ b\ c\ d\ e$ (incluyendo ángulos y vértices) es posible y deseamos encontrar aquel punto del polígono cuyas coordenadas minimizan $x_2 - x_1 = C$.

Todas las líneas $C = x_2 - x_1 =$ constantes son paralelas y una de ellas ha sido trazada con una flecha que indica la dirección en que disminuye C. Así, el punto posible que minimiza C es c, intersección de $x_4 = 0$, esto es, $x_1 - 2\,x_2 = 2$ y $x_5 = 0$, o sea $x_1 + x_2 = 5$, las coordenadas de c son $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$. El valor resultante de C es $1 - 4 = -3$, y ningún punto posible produce un valor más pequeño. Hemos obtenido ya este resultado en el último capítulo, y observamos que la sucesión de cuadros se refleja en nuestro gráfico por la sucesión de puntos $x_1 = x_2 = 0$ (es decir, "a"), $x_2 = x_4 = 0$ (es decir, "b"), y, finalmente, $x_4 = x_5 = 0$ (es decir, "c").

Nuestro gráfico demuestra que solamente ocurre en circunstancias excepcionales que el punto que lleva al óptimo de la F. L. se apoye en más de dos líneas o que haya más de un punto de este tipo.

No hay razón para elegir x_1 y x_2 como las coordenadas del sistema y cualquier par de variables podrían haberse elegido. Es también evidente que esta representación en dos dimensiones puedan utilizarse donde quiera que haya dos variables más que ecuaciones de condición.

Si aplicamos este método al juego definido por

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

que hemos considerado ya, encontramos que el problema de P. L., del jugador A, puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3-v} &= 1 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 - v &= 0 \\ x_1 + 3\,x_2 - x_4 - v &= 0 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 - x_5 - v &= 0 \end{aligned}$$

Maximizamos v para $x_1 \ldots, x_5$ no-negativas (v, pueden ser positivo, negativo o cero).

Si elegimos ahora x_1 y v como coordenadas cartesianas y expresamos las demás en términos de éstas, obtenemos nuevamente la figura II.1. Hay que advertir que la línea $v = 0$ no es una limitación del área de puntos posibles.

Pasamos ahora a los ejemplos que creemos pueden facilitar la introducción al lector en alguna de las complicaciones que pueden surgir. Estos ejemplos serán ligeramente diferentes del ejemplo 1, pero las diferencias serán suficientes para alterar aspectos esenciales del problema.

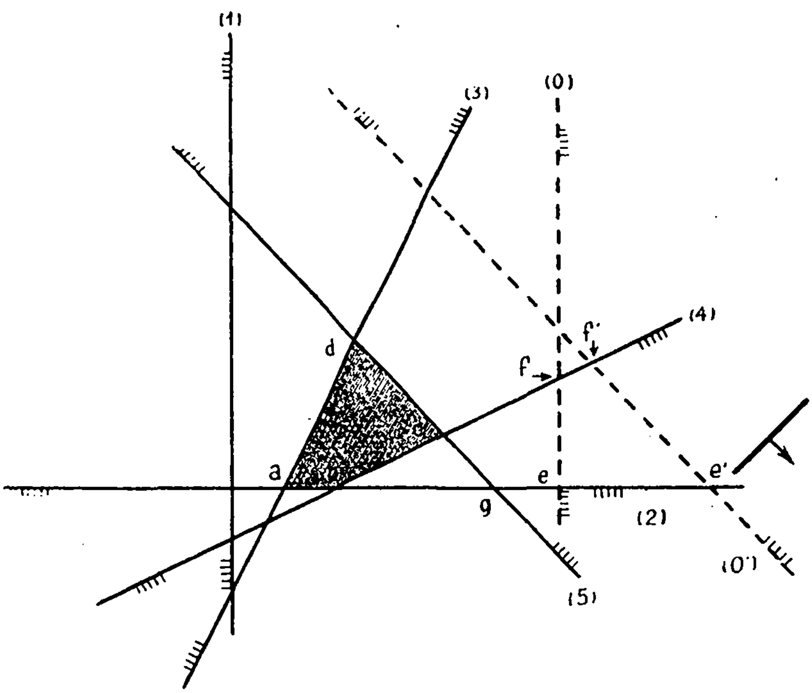

Fig. V.2

Una de las características especiales del ejemplo será el hecho de que el origen del sistema, es decir, $x_1 = x_2 = 0$ era un punto posible. Veremos ahora un caso en que esto no es cierto y en que puede ser difícil descubrirlo inspeccionando solamente las ecuaciones de condición

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

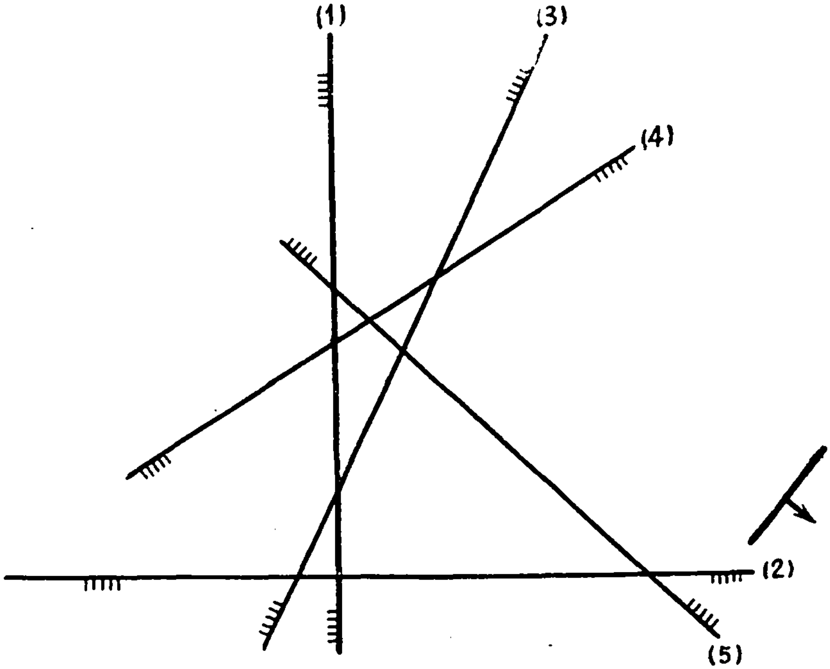

Fig. V.3

(Fig. V.2 contiene dos líneas de puntos marcadas (0) y (6), que no nos importan en este momento.)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= -8 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Maximizamos $x_2 - x_1 = C$ para valores positivos o nulos de x_1. Las ecuaciones de condición son contradictorias si las variables han de ser no-negativas. Esto puede demostrarse multiplicándolas, respectivamente, por $1, -1$ y 1, y sumándolas obtenemos $x_3 + x_4 + x_5 = -1$, lo que es claramente imposible de verificarse con valores positivos o nulos. Estudiando la región sombreada en la fig. V.2 descubrimos en realidad que no hay punto poosible en

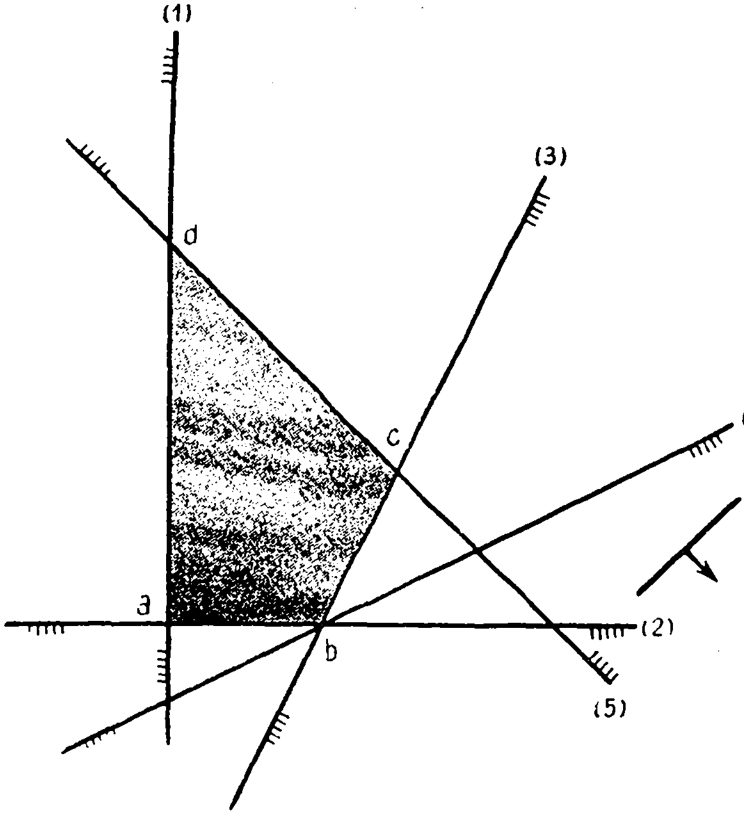

FIG. V.5

el plano. El próximo ejemplo aclara un caso de un punto posible que se apoya sobre tres líneas. Resulta claro que si se toma este punto como básico, una de las v. b. desaparece a causa de que no hay bastantes rectas a las que el punto tiene una distancia positiva

$$\begin{aligned} +2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Minimizamos $x_2 - x_1 = C$.

Finalmente, consideramos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Minimizamos $x_2 - x_1 = C$.

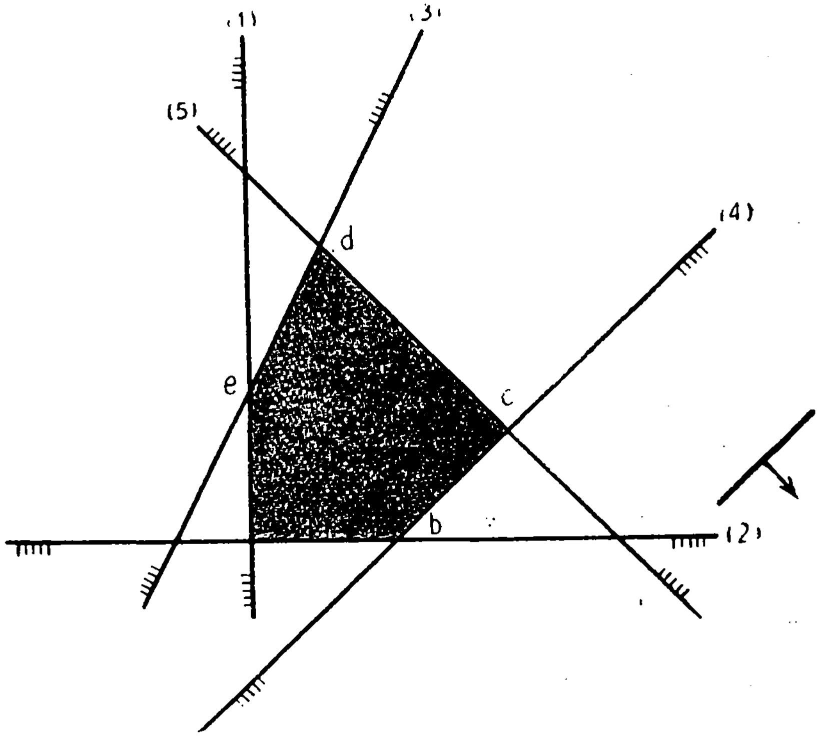

Fig. V.6

En este caso la línea $x_4 = 0$ es paralela a la línea $x_2 - x_1 = 0$, y de aquí que todos los puntos posibles de $x_4 = 0$ produzcan el mismo valor mínimo de la F. L.

Las consecuencias algebraicas de tales complicaciones o peculiaridades se considerarán en el cap. VII, mientras que el siguiente capítulo se ocupará de casos corrientes como el del ejemplo 1.

CAPITULO VI

ALGEBRA DEL METODO SIMPLEX (1)

El Capítulo IV ha servido como una introducción al MS. y en el presente capítulo deducimos sus características fundamentales por medios algebraicos.

Los sistemas de desigualdades lineales, sin ninguna exigencia de optimización han sido estudiados y el lector encontrará bibliografía en la Ref. 15. No entraremos aquí en detalles, ya que en estos artículos no se dan métodos numéricos prácticos.

Consideramos el problema definido por [1] y [2] de IV.I y supongamos que se ha encontrado s. p. b. Las v. b. las designaremos por $x_{u_1} \ldots x_{u_m}$ y las v. n. b. (que tienen de valor cero) por $x_{u_{m+1}}$ .. x_{u_n}. Las m condiciones pueden escribirse

$$a_{u_1 j}\, x_{u_1} + \ldots + a_{u_m j}\, x_{u_m} = b_j - (a_{u_{m+1} j}\, x_{u_{m+1}} + \ldots + a_{u_n j}\, x_{u_n}) \qquad [1]$$

para $j = 1, \ldots m$. Resolviendo este grupo para las v. b. obtenemos

$$x_{u_s} = \sum_{t=1}^{m} d_{ts} \left[b_t - \sum_{k=1}^{n-m} a_{u_{m+k} t}\, x_{u_{m+k}} \right] \qquad [2]$$

para $s = 1 \ldots m$.

Los d_{ts} son los elementos de la matriz que es inversa a la formada por los miembros del lado izquierdo de las condiciones, tal como aparecen escritos en [1]. Llamamos a la última matriz "matriz de coeficientes" de las v. b. Las d_{ts} tienen la propiedad fundamental de que $\sum_{s} a_{u_s t}\, d_{tr} = 1$ para $r = s$ y o en caso contrario.

En [2] aparecen también las expresiones

$$\sum_{t=1}^{m} a_{u_{m+k} t}\, d_{ts}$$

que designamos por $Z_{u_s u_{m+k}}$. Por uniformidad escribiremos $\sum_{t=1}^{m} d_{ts}\, b_t = Z_{u_s o}$, y tenemos entonces, por [2]

(1) A lo largo de toda la exposición siguiente y por motivos tipográficos, las X y x tienen el mismo significado.

$$x_{u_s} = Z_{u_s o} - \sum_{k=1}^{n-m} Z_{u_s u_{m+k}} \, x_{u_{m+k}}$$

Puede comprobarse utilizando las propiedades fundamentales de d_{ts} que $Z_{u_s u_{m+k}}$ puede satisfacer las ecuaciones

$$a_{u_{m+k} j} = a_{u_1 j} \, Z_{u_1 u_{m+k}} + \ldots a_{u_m j} \, Z_{u_m u_{m+k}} \qquad [3]$$

para $j = 1, \ldots m$; $k = 1, \ldots n - m$. Queremos también expresar la F. L. en términos de las v. n. b. Así sustituimos a las v. b. y obtenemos

$$C = \sum_{s=1}^{m} C_{u_s} \, Z_{u_s o} + \sum_{k=1}^{n-m} \left[C_{u_{m+k}} - \sum_{s=1}^{m} C_{u_s} \, Z_{u_s u_{m+k}} \right] x_{u_{m+k}} \qquad [4]$$

Podemos volver a escribir esto así

$$C = Z_{oo} - \sum_{k=1}^{n-m} Z_{ou_{m+k}} \, x_{u_{m+k}} \qquad [4a]$$

donde

$$''Z_{oo} = \sum_{s=1}^{m} C_{u_s} Z_{u_s o} \quad \text{y} \quad 'Z_{ou_{m+k}} = \sum_{s=1}^{m} C_{u_s} Z_{u_s u_{m+k}} - C_{u_{m+k}}$$

Donde los valores $X_{u_{m+k}}$ son cero, los de x_{u_s} son $Z_{u_s o}$ y el valor de C es Z_{oo} que es, por consiguiente, la suma de estos valores, multiplicado cada uno por su coeficiente.

Suponemos en este capítulo que las $Z_{u_s o}$ son positivas (no cero).

Puede deducirse de [4 a] que si las $Z_{ou_{m+k}}$ son todas positivas o cero, entonces C no puede disminuirse, aumentando cualquiera de las v. n. b. Por otra parte, si alguna $Z_{ou_{m+k}}$ es negativa, entonces un aumento de las correspondientes v. n. b. disminuirá C. Esta situación se expresa algunas veces diciendo que podemos interpretar [3] en el sentido de que una actividad, a la que $x_{u_{m+k}}$ se refiere, es equivalente a la combinación con ponderaciones $Z_{u_s u_{m+k}}$ de las actividades a las que las x_{u_s} se refieren y que C puede reducirse si el "coste", esto es, el coeficiente de la actividad particular $x_{u_{m+k}}$ es más pequeño que el coste de la actividad combinada equivalente, compuesta de las v. b. del paso que hemos alcanzado.

Si hay más de una variable que pudiera aumentarse beneficiosamente, nos encontramos con libertad para seleccionar cualquiera de ellas. No puede establecerse ninguna regla simple que nos diga con certeza qué elección conduce al resultado final en el menor número de pasos; pero ha demostrado que es acertado tomar aquella variable con el coeficiente menor.

Repetimos que si todos los coeficientes de las v. n. b. en la expresión de C son positivos o cero se ha logrado la solución final.

2. Cuando aumentamos una de las v. n. b., es decir, $x_{u_{m+h}}$ de cero a $X'_{u_{m+h}}$ el valor de x_{u_s} se convierte en

$$X'_{u_s} = Z_{u_s o} - Z_{u_s u_{m+h}} X'_{u_{m+h}}$$

Ahora si $Z_{u_s u_{m+h}}$ es negativa, entonces un aumento de $x_{u_{m+h}}$ aumenta x_{u_s} y su valor permanece positivo. Pero si el coeficiente es positivo, entonces no debemos aumentar el valor de $x_{u_{m+h}}$ más alla de $Z_{u_s o}/Z_{u_s u_{m+h}}$ $(S = 1, \ldots m)$. Dado que no puede ocurrir que ninguna de las v. b. sean negativas, hacemos $X'_{u_{m+h}}$ igual a las más pequeñas de los cocientes $Z_{u_s o}/Z_{u_s u_{m+h}}$ $(S = 1, \ldots m)$ con denominador positivo. Si la más pequeña de estas razones aparece cuando $s = r$ entonces es la variable x_{u_r} la que se hará cero y se eliminará de la base, haciendo

$$x_{u_{m+h}} = Z_{u_r o}/Z_{u_r u_{m+h}} = X_{u_{m+h}}$$

Las otras v. b. tendrán entonces los valores

$$Z_{u_s o} - Z_{u_s u_{m+h}} \frac{Z_{u_r o}}{Z_{u_r u_{m+h}}}$$

y serán así positivas (o cero en casos especiales). La nueva base es la misma que antes, excepto que x_{u_r} ha sido reemplazada por $x_{u_{m+h}}$ Expresamos las nuevas v. b. por las nuevas v. n. b. haciendo lo mismo para la F. L. y comenzando la nueva etapa.

3. En cada etapa nos hemos encontrado con un grupo de condi-

ciones que pasando todas las variables al lado izquierdo pueden escribirse como sigue:

$$X_{u_s} = x_{u_s} = \sum_{k=1}^{n-m} Z_{u_s u_{m+k}} = Z_{u_s o} \quad (s = 1, \ldots m)$$

$$C + \sum_{k=1}^{n-m} Z_{o u_{m+k}} x_{u_{m+k}} = Z_{oo} \; ; \quad X_{u_{m+k}} = x_{u_{m+k}}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma de cuadro, así:

CUADRO I

			$\underline{X_{u_{m+1}}}$	$\underline{X_{u_{m+h}}}$	$\underline{X_{u_n}}$
			$C_{u_{m+1}}$	$C_{u_{m+h}}$	C_{u_n}
C_{u_1}	$\underline{X_{u_1}}$	$Z_{u_1 o}$	$Z_{u_1 u_{m+1}}$	$Z_{u_1 u_{m+h}}$	$Z_{u_1 u_n}$
C_{u_r}	$\underline{X_{u_r}}$	$Z_{u_r o}$	$Z_{u_r u_{m+1}}$	$Z_{u_r u_{m+h}}$	$Z_{u_r u_n}$
C_{u_m}	$\underline{X_{u_m}}$	$Z_{u_m o}$	$Z_{u_m u_{m+1}}$	$Z_{u_m u_{m+h}}$	$Z_{u_m u_n}$

Los símbolos subrayados son las calificaciones de las columnas, y filas, mientras que las otras expresiones son numéricas y las $Z_{s o}$, en particular, son positivas. Las C_{u_1} C_{u_n} son los coeficientes en la primera expresión de C. Si las v. b. no aparecen en la expresión original de la F. L. entonces en el primer cuadro $Z_{o\,o} = 0$. Esto pasaba en el ejemplo 1 de los caps. IV y V.

Si queremos minimizar (maximizar) la F. L. entonces $Z_{o u_{m+k}}$ positiva (negativa) indica una variable $X_{u_{m+k}}$ que puede introducirse en las bases. (Recordad que las cifras en el cuadro y que Z_{oo} y $Z_{u_s o}$ son los valores negativos de los coeficientes [2] y [4].) Habiéndonos decidido por $X_{u_{m+h}}$ dividimos $Z_{u_s o}$ por $Z_{u_s u_{m+h}}$ en aquellas filas en las que el último valor es positivo y tomamos la X_{us} fuera de la base que da el cociente más pequeño. En este capítulo suponemos que no hay relación entre aquellos cocientes que comparamos.

Como anteriormente, cambiando el grupo de variables en cada paso, podíamos, en principio, solucionar una y otra vez el cómputo de ecuaciones de condición para aquellas variables que han resultado básicas y construir un nuevo cuadro. Afortunadamente este torpe procedimiento es innecesario, porque podemos dar reglas que nos digan cómo transformar un cuadro en el siguiente de una forma sencilla.

4, Consideramos ahora que la variable que se ha de eliminar de la base es X_{u_r} y la que se ha de introducir $X_{u_{m+h}}$. Entonces $Z_{u_r u_{m+h}} > 0$.

De la ecuación

$$X_{u_r} + \sum_{k=1}^{n-m} Z_{u_r u_{m+k}} X_{u_{m+k}} = Z_{u_r o}$$

Obtenemos, primero

$$X_{u_{m+h}} + \sum_{\substack{k=1 \\ \neq h}}^{n-m} \frac{Z_{u_r u_{m+k}}}{Z_{u_r u_{m+h}}} X_{u_{m+k}} + \frac{1}{Z_{u_r u_{m+h}}} X_{u_r} = \frac{Z_{u_r o}}{Z_{u_r u_{m+h}}}$$

y sustituyendo entonces por $X_{u_{m+h}}$ en las otras ecuaciones

$$X_{u_s} + \sum_{\substack{k+1 \\ \neq h}}^{n-m} \left[Z_{u_s u_{m+k}} - \frac{Z_{u_r u_{m+k}}}{Z_{u_r u_{m+h}}} Z_{u_s u_{m+h}} \right] X_{u_{m+k}} - \frac{Z_{u_s u_{m+h}}}{Z_{u_r u_{m+h}}} X_{u_r} = Z_{u_s o} - \frac{Z_{u_r o} Z_{u_s u_{m+h}}}{Z_{u_r u_{m+h}}}$$

para $s = 1, \ldots m$, pero $\neq r$ mientras la ecuación c puede transformarse en la misma ecuación, reemplazando X_{u_s} por C y todas las u_s, dondequiera que aparezca como un sufijo de Z, por 0.

Escribimos la nueva fila para $X_{u_{m+h}}$ en el lugar que ha dejado libre X_{u_r} y la nueva columna para X_{u_r} en el lugar donde $X_{u_{m+h}}$

Introduciremos las abreviaturas siguientes:

S'_s para $Z_{u_s u_{m+h}} / Z_{u_r u_{m+h}}$ cuando $s \neq r$

S_r para $-1/Z_{u_r u_{m+h}}$ y

S_o para $Z_{o u_{m+h}} / Z_{u_r u_{m+h}}$

Escribamos también:

T_k para $Z_{u_r u_{m+k}}/Z_{u_r u_{m+h}}$ cuando $k \neq h$

T_h para $1/Z_{u_r u_{m+h}}$ y

T_o para $Z_{u_r o}/Z_{u_r u_{m+h}}$

El valor $Z_{u_r u_{m+h}}$ que aparece en todas estas expresiones es el punto fundamental o pivote.

Con estos símbolos podemos escribir el cuadro II de la página siguiente.

Ambas fórmulas son útiles y el lector se encuentra en disposición de expresarlas en palabras y contrastar sus conocimientos con el cuadro del Capítulo IV, que aclara las reglas de transformación. Estas reglas se simplifican, en gran parte, si hay un cero en la columna o en la fila del pivote. En el primer caso la fila completa pertenece invariable, y en el segundo, la columna completa.

Habiendo efectuado la transformación podemos comprobar el nuevo cuadro por la fórmula que define $Z_{ou_{m+k}}$ en donde las U_s son ahora los subíndices de las nuevas v. b. y las U_{m+k} los de las nuevas v. n. b.

5. La variable que hemos introducido en la base, esto es, $X_{u_{m+h}}$ tiene ahora el valor $Z_u{}^1{}_{m+h}{}^o = Z_{u_r o}/Z_{u_r u_{m+h}}$ y la F. L. ha sido reducida por $Z_u{}^1{}_{m+h}{}^o \cdot Z_{o\,u_{m+h}}$. Si el segundo factor es negativo, entonces esta "reducción" será negativa también, esto es, la F. L. habrá aumentado. Esto ocurre cuando deseamos maximizar la F. L.

Cuando el nuevo valor no es cero, entonces la F. L. cambia de un cuadro a otro y siempre en el mismo sentido. Pero dado que solamente existe un número finito de s. p. b. estos cambios no pueden continuar indefinidamente, ya que nunca podemos volver al total inicial de la F. L. De aquí que el proceso deba terminar. (El caso en que el valor de la nueva variable en la base *r* de cualquier v. b. llegue a ser cero se estudiará en el cap. VII.)

6. Hemos completado la descripción del M. S. eliminando algunas complicaciones que se resolverán en el próximo capítulo. Pero

CUADRO II

			$\underline{X_{u_{m+k}}}$ $(k \neq h)$	$\underline{X_{u_r}}$
			$C_{u_{m+k}}$	C_{u_r}
$s \neq r$ C_{u_s}	$\underline{X_{u_s}}$	$Z_{u_s o} - S_s Z_{u_r o}$	$Z_{u_s u_{m+k}} - S_r Z_{u_r u_{m+k}}$	$- S_s$
$C_{u_{m+h}}$	$\underline{X_{u_{m+h}}}$	$- S_r Z_{u_r o}$	$- S_r Z_{u_r u_{m+k}}$	$- S_r$
	$\underline{C}$	$Z_{oo} - S_o Z_{u_r o}$	$Z_{ou_{m+k}} - S_o Z_{u_r u_{m+k}}$	$- S_o$

o también como sigue

$(s \neq r)$ C_{u_s}	$\underline{X_{u_s}}$	$Z_{u_s o} - T_o Z_{u_s u_{m+h}}$	$Z_{u_s u_{m+k}} - T_k Z_{u_s u_{m+h}}$	$- Z_{u_s u_{m+k}} T_h$
$C_{u_{m+h}}$	$\underline{X_{u_{m+h}}}$	T_o	T_k	T_h
	$\underline{C}$	$Z_{oo} - T_o Z_{ou_{m+h}}$	$Z_{ou_{m+k}} - T_k Z_{ou_{m+k}}$	$- Z_{ou_{m+h}} T_h$

el método de cálculo no tiene porque ser precisamente el que hemos usado y puede resultar útil dar una variante del mismo. El análisis detallado del M. S. muestra que en cada momento es el conjunto de $Z_{o\, u_{m+k}}$ el que decide la selección de la nueva v. b. y que una vez que ha sido elegido como v. b. $X_{u_{m+h}}$, solamente los valores $Z_{u_s o}$ y $Z_{u_s u_{m+h}}$ importan. Es importante averiguar si estos valores podrían encontrarse por algún otro método. Mostraremos ahora una alternativa que llamamos el Método de la Matriz Inversa (M. M. I.) por razones que se comprenderán.

Repetimos, por considerarlo conveniente, las siguientes definiciones:

$$Z_{u_s o} = \sum_{t=i}^{m} d_{ts} \cdot b_t, \quad Z_{u_s u_{m+k}} = \sum_{t=i}^{m} d_{ts}\, a_{u_{m+k}\, t}$$

$$Z_{ou_{m+k}} = \sum^{m} c_{u_s} Z_{u_s u_{m+k}} - c_{u_{m+k}}$$

$$Z_{oo} = \sum_{s=1}^{m} c_{u_s} Z_{u_s o}$$

Consideremos la matriz

$$(M) = \begin{pmatrix} b_1 & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & 0 \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} & 0 \\ 0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 1 \end{pmatrix}$$

Llamaremos a sus columnas la 0 — la primera, la enésima respectivamente.

Las v. b. son $X_{u_1}, \dots X_{u_m}$ y extraemos de (M) la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{u_1 m} & \dots & a_{u_m 1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{u_1 m} & \dots & a_{u_m m} & 0 \\ -c_{u_2} & \dots & -c_{u_m} & 1 \end{pmatrix} = A$$

Calculamos también la inversa de (A), esto es:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{m1} & 0 \\ d_{1m} & \ldots & d_{mm} & 0 \\ \sum\limits_{s} c_{u_s} d_{1_s} & \ldots & \sum c_{u_s} d_{ms} & 1 \end{pmatrix} = (A)^{-1}$$

Si omitimos la última fila y la última columna de (A) entonces tenemos la matriz de los coeficientes de las v. b. Su inversa es la matriz obtenida de $(A)^{-1}$ omitiendo la última fila y columna.

El producto interior (1) de la fila α de $(A)^{-1}$ y la columna β de (A) es cero cuando $\alpha \neq \beta$, y la unidad cuando $\alpha = \beta$. Pero si formamos el producto interior de la última fila de $(A)^{-1}$ con la columna u_{m+k} que no está en A entonces obtenemos:

$$\sum_{s} \sum_{t} c_{u_s} d_{t_s} a_{u_{m+k}t} + 1\,(-c_{u_{m+k}}) = \sum_{s} c_{u_s} Z_{u_s u_{m+k}} - c_{u_{m+k}} = Z_{0 u_{m+k}}$$

Si calculamos todos estos productos interiores, podemos elegir entonces la variable $X_{u_{m+h}}$ que ha de introducirse en la base. Debemos entonces encontrar X_{u_r} la variable que deberá eliminarse de ella. En este momento hemos encontrado $Z_{u_s 0}$ y $Z_{u_s u_{m+h}}$. Pero éstos son, respectivamente, los productos interiores de las sucesivas filas de $(A)^{-1}$ multiplicados por las columnas 0 y u_{m+h} de (M). Advirtamos también que el producto interior de la última fila de (A^{-1}) y la columna 0 de (M) es

$$\sum_{s} \sum_{r} c_{u_s} d_{ts} b_t = \sum_{s} c_{u_s} Z_{u_s 0} = Z_{00}$$

Las matrices (M) y (A) pueden, al comienzo del proceso, escribirse fácilmente partiendo de las constantes de las ecuaciones de condición y F. L. (A) tiene una última columna que consiste de 0 con un 1 en la base. Pero necesitamos saber también cómo puede encontrarse la matriz inversa de la última etapa a través de cualquier método sencillo. Afirmamos que la transformación es la misma que para el cuadro en el M. S. Utilizando la primera forma de

---

(1) El producto interior de un conjunto $(a_1 \ldots a_n)$ y un conjunto $(b_1 \ldots b_n)$ se define como la suma $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

esta transformación, podemos escribir la siguiente matriz inversa como un producto de dos matrices, esto es,

$$(A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -S_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -S_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -S_r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -S_m & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -S_0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (A)^{-1}.$$

La prueba es sencilla y no la damos aquí. Se realiza calculando el producto de esta nueva inversa por la nueva (A) que difiere de la última simplemente en que el sufijo u_r es remplazado por el sufijo u_{m+h}. Si recordamos las definiciones de S_s, etc., el resultado se obtiene en seguida.

7. Acabamos de ver que la matriz inversa en cada paso está pre-multiplicada por otra matriz y advertimos ahora que el valor del determinante de la última es $-S_r$, es decir, el recíproco del pivote. Se deduce de esto que en cada transformación el determinante de (A) se multiplica por el pivote. El último es siempre positivo y de aquí, si comenzamos con una matriz no-singular, ninguna de las últimas matrices de los coeficientes será singular. No podemos asegurar que el determinante será positivo, porque el signo depende del orden en que pongamos las filas y columnas.

8. Como una aclaración, elegimos el ejemplo 1 del capítulo IV. Tenemos.

$$(M) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$(A) = (A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (X_3) \\ (X_4) \\ (X_5) \\ \end{array} \begin{array}{c:ccc} & Z_{u,0} & Z_{u,1} & S_s \\ & 2 & -2 & -2 \\ & 2 & 1 & -1 \\ & 5 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

(El significado de las cifras a la derecha de la línea de puntos se aclarará en seguida).

El producto interior de la última fila de $(A)^{-1}$ y las columnas de (M) no en (A)

$Z_{u_s,0}$	$Z_{u_s,1}$	S_s
0	1	-1
	(X_1)	(X_2)

De aquí que la nueva v. b. es X_1.

Continuamos formando los productos interiores de las filas de $(A)^{-1}$ con la 0 y la primera columna de (M) para obtener $z_{u_s 0}$ y $z_{u_s 1}$. Los resultados se incluyen en las columnas adecuadas anteriores a la derecha de la línea de puntos. La razón más pequeña $z_{u_s 0}/z_{u_s 1}$ con denominador positivo se presenta para $u_s = 4$. Podemos encontrar ahora S_s y S_0 que han sido también incluídas en la última de la derecha.

El próximo cuadro aparece como sigue:

					$Z_{u_s,0}$		$Z_{u_s,2}$	S_s
$[X_3]$	1	2	0	0	6		-3	-1
$[X_1]$	0	1	0	0	2		-2	$-2/3$
$[X_5]$	0	-1	1	0	3		3	$-1/3$
	0	-1	0	1	-2	-1	1	$1/3$
						$[x_4]$	$[x_2]$	

De aquí que X_2 deberá ser v. b. Calculamos $Z_{u_s 2}$ (recogida anteriormente) descubrimos que la nueva v. n. b. es X_5 y calculamos S_s (recogida también). De un modo análogo obtenemos

					$Z_{u_s,0}$		
$[X_3]$	1	1	1	0	9		
$[X_1]$	0	$1/3$	$2/3$	0	4		
$[X_2]$	0	$-1/3$	$2/3$	0	1		
[C]	0	$-2/3$	$-1/3$	1	-3	$-2/3$	$-1/3$
						$[X_4]$	$[X_5]$

Este es el cuadro final, porque Z_{04} y Z_{05} son negativas, esto es, valen $-2/3$ y $-1/3$.

9. No resulta útil que las matrices inversas $(A)^{-1}$ estén ya implícitas en el cuadro simple si, como ocurre a menudo, comenzamos con variables cuya matriz de coeficientes es matriz única y no aparece en la F. L. original. Para demostrar esto explícitamente, recordamos la fórmula [3] de este capítulo. Podemos también definir valores $Z_{u_s u_t}$ para $t = 1 - m$ que satisfacen ecuaciones análogas. Es evidente entonces que $Z_{u_s u_t} = 1$ cuando s es igual a t y v en caso contrario.

Introducimos ahora el concepto de un "cuadro del simplex ampliado" (distinto del cuadro anterior "restringido") que tiene una columna para cada variable y aparece como sigue:

CUADRO III

			$\underline{X_1}$	$\underline{X_n}$	
			C_1	C_n	
C_{u_1}	$\underline{X_{u_1}}$	$Z_{u_1 0}$	$Z_{u_1 1}$	$Z_{u_1 n}$	0
C_{u_m}	$\underline{X_{u_m}}$	$Z_{u_m 0}$	$Z_{u_m 1}$	$Z_{u_m n}$	0
	$\underline{C}$	Z_{00}	Z_{01}	Z_{01}	1

Aquellas columnas que tienen el mismo distintivo como es el de las v. b. serán muy sencillas.

Contienen ceros, excepto en la fila de su propia variable, donde hay un 1. Hay que advertir también que hemos añadido una última columna que tiene también ceros, excepto en la base, donde nuevamente aparece un 1.

Si las v. b. originales fuesen $X_{v_1} \dots X_{v_m}$ y su matriz de coeficientes fuese la matriz unidad, entonces $a_{v_i j} = 0$ para $i \neq j$ y 1 para $i = j$. En consecuencia, comparando [3]

$$a_{u_i j} = \sum_s a_{u_s j} Z_{u_s v_j} = 1 \quad \text{y} \quad a_{v_i j} = \sum_s a_{u_s j} Z_{u_s v_i} = 0 \qquad i \neq j$$

Esto quiere decir que la matriz que tiene a $a_{u_k t}$ en su fila t y la columna k es la inversa que tiene $Z_{u_t v_k}$ en su fila t y columna k. La última es $(A)^{-1}$, prescindiendo de la última fila y la última columna. Las cantidades $Z_{0 v_i}$ de la última fila son iguales a

$$\sum_t C_{u_t} Z_{u_t v_k} - C_{vk}$$

por construcción del cuadro simplex, y de aquí que sean iguales a las correspondientes cantidades en la última fila de $(A)^{-1}$ porque hemos considerado $C_{vk} = 0$. La última columna de $(A)^{-1}$ está compuesta de ceros con un 1 final en todas las etapas.

Es una característica del M. M. I. que en cada etapa nos referimos nuevamente a los coeficientes originales de las ecuaciones de condición. Puede, por tanto, pensarse que el efecto de cometer errores será en conjunto menores si se emplea en el M. M. I. que en el M. S.

10. En nuestros procedimientos hemos solamente considerado las s. p. b. Justificamos esto demostrando que si existe una s. p. óptima que no es básica, entonces existe también por lo menos una s. p. b. óptima. Demostramos que si los conjuntos de variables que forman s. p. b. óptimos son limitados, entonces cualquier s. p. es una combinación lineal de s. p. b. óptimas.

Supongamos que tenemos una s. p. óptima. Podemos volver a ennumerar las variables de tal forma que las positivas sean $x_1 \ldots x_t$.

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{t1} \\ a_{1m} & a_{tm} \end{pmatrix}$

Si esta matriz tiene un rango $r\,(\geq t, m)$ entonces podemos suponer, sin perder generalidad, que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{r1} \\ a_{1r} & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$

Mantenemos $X_{r+2} \ldots X_n$ constantes y solucionamos las primeras r ecuaciones de condición para $x_1 \ldots x_r$ obteniendo

$$\begin{aligned} X_s &= v_s + w_s \quad X_{r+1} \quad (s = 1 \ldots r) \\ c &= v_0 + w_0 \quad X_{r+1} \end{aligned}$$

Si $X_{r+1} = 0$ entonces también $X_{r+2} = \text{—} = X_n = 0$ y (por simples consideraciones algebraicas) podemos encontrar una matriz M . M de coeficientes de los que forma parte la matriz $(r\,x\,r)$, dada anteriormente. Entonces $X_1 \ldots X_4$ son siempre s. p. b.

Si X_{r+1} es positiva y también todas las X_s $(s = 1 - r)$, podemos cambiar ligeramente X_{r+1} bien aumentándolo o disminuyéndolo, sin hacer negativa ninguna de las variables. Podemos hacer $w_0 = 0$ de otra forma, estos cambios disminuirían C y se suponía ya que era mínima. Todas las soluciones obtenidas cambiando X_{r+1} en cualquier forma, son óptimas. Disminuyamos ahora X_{r+1} continuamente hasta que ella misma o una de las X_s llegue a ser cero. Podemos incrementar alternativamente X_{r+1} continuamente, y esto eliminará una de las X_s por lo menos, o el grupo óptimo es ilimitado. Hemos descubierto dos s. p. óptimas con menos variables positivas, de las cuales la óptima s. p. es una combinación lineal. Continuando del mismo modo se prueban nuestras afirmaciones.

Es fácil ver ahora que lo dicho sigue siendo cierto si omitimos la palabra óptimo. La forma de la F. L. es entonces irrelevante para la demostración y debemos elegir C idénticamente igual a 0. Entonces todas las s. p. son óptimas y la aseveración se ha demostrado.

CAPITULO VII

DEGENERACION Y OTRAS COMPLICACIONES

Hemos indicado ya todas las complicaciones posibles. Las dificultades pueden surgir de la siguiente forma:

(*a*) No podemos encontrar una s. p. b. En realidad, puede ser que no exista ninguna.

(*b*) Las reglas para conseguir la solución pueden fallar sin que hayamos logrado la solución final.

(*c*) El criterio para la elección de la variable que ha de ser eliminada de las bases no indica una única elección.

(*d*) Algunas de las v. b. son cero.

2. A veces es muy fácil inicialmente encontrar algunas s. p. b. Este es por ejemplo el caso, cuando el sistema de ecuaciones, originado por las desigualdades y los elementos de la derecha,

tienen el mismo signo que la variable adicional. Para dar un ejemplo menos trivial, en el problema del transporte podemos elegir cualquier combinación (i, j) y hacer y_{ij} igual a la más pequeña de las dos cantidades a_i, b_j. Habiendo dispuesto de cualquier a_i o b_j completamente, obtenemos un problema reducido que puede ser atacado de la misma forma y seguir de esta forma hasta que se obtiene la primera s. p. b. (Para una primera s. p. b. en la formulación de un problema de juegos ver IX. 1).

3. Supongamos ahora que no puede descubrirse ninguna s. p. por inspección. Consideramos todas las b_j no negativas, si es necesario multiplicamos las ecuaciones por —1. Consideremos que existen $k \leq m$ variables tales que cada una aparece solamente en una ecuación y tiene un coeficiente positivo a_{ij} (k puede por consiguiente ser cero). Hacemos entonces estas x_i iguales a b_j/a_{ij} y todas las otras variables cero. Así se satisfarán k ecuaciones, pero no las restantes $m - k$. Aplicamos el siguiente procedimiento: Añadimos "$m - k$" variables "artificiales". Reservamos la expresión "variables adicionales" para aquellas que se introduzcan con objeto de convertir una desigualdad en igualdad no negativas $X_{n+k+1} \ldots X_{n+m}$ una en cada primer miembro de las ecuaciones que deben satisfacerse. Supondremos que estas ecuaciones son las $m - k$ últimas del conjunto. Tendremos

$$a_{1j} X_2 + \ldots + a_{nj} X_n + X_{n+j} = b_j \qquad (j = k + 1, \ldots m)$$

Estas ecuaciones se satisfacen haciendo

$$X_{n+k+1} = b_{k+1} \; ; \qquad X_{n+m} = b_m$$

No queremos tener variables artificiales en la solución final. Sin embargo las introducimos también en la F. L. con coeficientes grandes M (si ha de minimizarse la F. L.) o — M (si ha de maximizarse).

Así la F. L. se transforma en

$$c_1 X_1 + \ldots + c X_n \pm M (X_{n+k+1} + \ldots + X_{n+m}) =$$
$$= [c_1 \mp M (a_{1\,k+1} \ldots a_{1m})] X_1 + \ldots [c_n \mp M (a_{n\,k+1} + \ldots + a_{nm})] X_n \pm$$
$$\pm M (b_{k+1} + \ldots + b_m)$$

M se tomará mayor que cualquier número con el que se compare durante el proceso. Ahora bien, si hay una s. p. al sistema, con las variables artificiales igual a cero, entonces obtendremos una solución, ya que una F. L. que contiene M en la forma anterior, no alcanzará su valor óptimo. Si logramos entonces una solución final y contiene cualquiera de las variables artificiales con valores no-cero, podemos llegar a la conclusión que no existe s. p. en el sistema original. Por otra parte, una vez que hemos logrado eliminar una variable artificial de la base no necesitamos considerarla más, ya que hemos logrado entonces una s. p. b. sin ayuda de esa variable, que se ha transformado en superflua.

4. Como aclaración, consideremos el ejemplo 2 del cap. V. Introducimos una variable artificial x_0 en la primera ecuación

$$-2X_1 + X_2 + X_3 - X_0 = -2$$

y transformamos la F. L. en $X_2 - X_1 + MX_0$. Partimos de $X_4 = 2$, $X_5 = 5$, $X_0 = 2$ y expresamos la F. L. en términos de X_1, X_2 y X_3, así:

$$2M - (1 + 2M)X_1 + (1 + M)X_2 + MX_3$$

		X_1	X_2	X_3
		-1	1	
X_4	2	1	-2	0
X_5	5	1	1	0
MX_0	2	2	1	-1
	0	1	-1	0
M	2	2	-1	-1

Es conveniente separar los coeficientes de la F. L. en una parte que no contenga M y otra que la contenga. La última fila del cuadro contiene en realidad números que vendrán multiplicados por M. En tanto en cuanto en esta fila sean valores no-cero son inutilizados. En el ejemplo presente, ocurre que una vez que hemos eliminado la variable artificial y la fila M no es necesario seguir adelante. Los cuadros siguientes son:

			X_2	X_3
			1	
—1	X_1	1	—1/2	—1/2
	X_4	1	3/2	1/2
	X_5	4	3/2	1/2
		—1	—1/2	1/2

			X_2	X_4
			1	
—1	X_1	2	—2	1
	X_3	2	—3	2
	X_5	3	3	1
		—2	1	—1

			X_5	X_4
—1	X_1	4	2/3	1/3
	X_3	5	1	1
1	X_2	1	1/3	—1/3
		—3	—1/3	—2/3

La solución final no contiene la variable artificial. En la *figura* V.2 el progreso del método se representa por la sucesión de puntos *a*, *b*, *c*.

5. Hemos visto que las cantidades en la fila M son:

$$\Sigma\, b_t \,,\ \Sigma\, a_{1t} \ldots \Sigma\, a_{nt}$$

donde la suma se extiende sobre las *t*, que designan ecuaciones en las que se han introducido variables artificiales. Podemos, por lo tanto, interpretar el método M, diciendo que a partir del mismo. tratamos de minimizar (o maximizar) la F. L. artificial

$$\Sigma\, b_t - X_1\, \Sigma\, a_{1t} - \ldots - X_n\, \Sigma\, a_{nt}$$

Si el óptimo es cero, hemos descubierto una s. p. y podemos proceder a optimizar la F. L. que realmente nos importa. Sin embargo, si es positiva, entonces no existe s. p. La F. L. no puede nunca ser negativa, porque es igual a la suma de las variables no-negativas

$$\sum_t X_{n+t}$$

6. Una versión ligeramente diferente del método M puede emplearse cuando sea fácil resolver las restricciones para *m* variables.

Obtendremos:

$$X_{u_s} + \sum_{k=1}^{n-m} Z_{u_s u_{m+k}} X_{u_{m+k}} = Z_{u_s 0} \quad (s = 1, \ldots n)$$

Sean $Z_{u_1 0} \ldots Z_{u_t 0}$ negativas y las restantes Z_{u_s} no negativas. Supongamos que $Z_{u_1 0}$ es la más pequeña (algebraicamente), es decir, la más negativa de las $Z_{u_s 0}$. Entonces necesitamos introducir solamente una variable artificial x_{n+1} se introduce restándola del término de la izquierda de la 1.ª esima tésima ecuación. Sumaremos también $+ M X_{n+1}$ ó $- M X_{n+1}$ a la función lineal. Lo que expresamos a continuación es una s. p. b.

$$x_{u_1} = 0 \quad X_{u_2} = Z_{u_2 0} - Z_{u_1 0}, \ldots X_{u_t} = Z_{u_t 0} - Z_{u_1 0}, \quad X_{n+1} = - Z_{u_1 0}$$
$$X_{u_s} = Z_{u_s 0} \text{ para } S = t + 1, \ldots m \text{ como antes } (*)$$

7. Como el objeto del método M es encontrar, primero, alguna s. p. b., la forma precisa de la F. L. es irrelevante en los primeros pasos. Se deduce que podemos también emplear este método para encontrar la solución de un conjunto de n ecuaciones lineales con n variables, en donde intrínsecamente no hay planteado ningún problema de optimación. En tales casos podríamos tomar como F. L. a minimizar la suma de las variables artificiales multiplicadas por M. Cuando han sido eliminadas se ha encontrado la solución. Sin embargo, debe recordarse que en este problema algebraico elemental, solamente las variables artificiales tienen restricción en el signo. Podemos, por lo tanto, remplazar siempre cada una de las otras por la diferencia de dos variables con restricción en el signo o proceder como en el método M, pero recordando que solamente las variables artificiales deben a cada etapa retener su signo (o anularse). El lector debe poder encontrar el procedimiento correcto, si quiere, pero nosotros no lo hacemos, a causa de que hemos mencionado esta forma de resolver sistemas de ecuaciones más como una curiosidad que como un método recomendable. Podríamos invertir una matriz no singular. (A) por un proceso de P. L. Haremos (A) la matriz de los coeficientes de un conjunto de restricciones igual en número al

(*) Detalles sobre este método los de S. I. y en Ref. 31.

de las variables y con miembros a la derecha, tales que sepamos que el sistema tiene una solución. Por ejemplo, podríamos hacer el lado de la derecha igual a la suma de los coeficientes de la misma ecuación, con lo que la solución será $x_i = 1$. Añadimos una F. L. muy sencilla, por ejemplo, 0. No hay problemas de optimización, ya que el sistema tiene solamente una solución.

Si ahora empleamos el método M con m variables artificiales y empleamos el M. M. I. obtenemos finalmente $(A)^{-1}$ quizá con alguna permutación de filas y columnas, que pueden fácilmente descubrirse.

8. (1) El ejemplo 3 del capítulo V requiere una variable artificial en la segunda ecuación. Cuando el lector realice el cálculo, encontrará que x_0 permanece en la base cuando alcanza la solución final. Esto no puede constituir una sorpresa, ya que él sabe que las condiciones de este ejemplo son contradictorias.

9. Nuestro nuevo ejemplo se refiere al caso en que hay s. p., pero no un valor finito mínimo para el F. L.

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2 \\
x_1 + x_2 - x_5 &= 5
\end{aligned}
$$

Minimizar $x_2 - x_1$.

Este ejemplo es el 1, con la única diferencia de que hemos cambiado el signo de x_5. En términos geométricos (ver fig. V.I) esto significa que la línea recta $x_1 + x_2 = 5$ excluye el lado que contiene el cero. De esta forma, la parte del plano que contiene las soluciones posibles no está acotada. Podemos obtener el mismo cuadro final que en el capítplo IV con el ejemplo 1; la diferencia es que los signos de las cantidades en la columna x_5 han cambiado. Esto sugeriría que x_5 entrase en la base, pero ninguna de las v. b. tiene una cantidad positiva en esta columna, y de esta forma nuestras reglas fallan para la renovación de la base.

Comprendemos lo que esto significa cuando recordamos que sólo consideramos relaciones con denominadores positivos en este

(1) El lector observará que las X con subíndices tienen el mismo significado ya sean mayúsculas o minúsculas.

paso. Esto era motivado porque necesitábamos hacer cualquiera de las variables negativas a través de un excesivo incremento de la v. n. b. Mientras no habíamos pensado en incrementar las v. b. En el caso presente todas incrementan cuando incrementamos x_5 y la F. L. podría, por tanto, decrecer. Consecuentemente, las últimas pueden decrecer sin límite y no se producen s. p. que dan un valor mínimo.

Hacemos notar que haciendo x_5 cada vez mayor con valores positivos, podemos construir una sucesión de s. p. con $m+1$ variables tales que C tiende a ∞. Es evidente que una propiedad análoga se aplica siempre que no existan s. p. óptimas.

10. Hay otra forma de descubrir que el valor de la F. L. no está acotado. Podemos introducir una condición "artificial" con una variable artificial x_{n+1}, o sea

$$x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = \Omega$$

en donde Ω es un número grande pero finito. Si hay una combinación de $x_1, \ldots x_n$ finita que produce el óptimo de la F. L. entonces tenemos

$$x_{n+1} = \Omega - \sum_{1}^{n} x_i$$

Por otra parte, si no existe tal combinación finita para el problema original, entonces (las condiciones son contradictorias) obtenemos una solución del nuevo problema, ya que la ecuación artificial no puede contradecir ninguna de las otras restricciones y asegura el que las x_i estén acotadas. Sin embargo, las expresiones para los valores finales de las x_i $(i = 1 \ldots n)$ contendrán Ω, y esto será una indicación de que el problema original no tiene solución finita.

11. Tomaremos ahora el ejemplo 4 del Capítulo V. Del primer cuadro

		x_1	x_2
		-1	1
x_3	4	2	-1
x_4	2	1	-2
x_5	5	1	1
	0	1	-1

Se ve que debemos introducir x_1 en la base. ¿Pero qué variable debe reemplazarla? Los cocientes 2/1 y 4/2 son iguales y debemos elegir entre x_3 ó x_4. Veremos qué sucede en este caso. El cuadro segundo será uno de estos dos:

			x_2	x_3
			1	
-1	x_1	2	$-1/2$	$1/2$
	x_4	0	$-3/2$	$1/2$
	x_5	3	$3/2$	$-1/2$
		-2	$-1/2$	$-1/2$

			x_2	x_4
			1	
	x_3	0	3	-2
-1	x_1	2	-2	1
	x_5	3	1	-1
		-2	1	-1

En ambos casos una de las variables que permanece en la base tiene el valor cero. Esto es una consecuencia que se deduce necesariamente de la igualdad de los dos cocientes en el cuadro anterior. En el cuadro de la izquierda la cosa no tiene importancia porque ya hemos alcanzado la última etapa. Por el contrario, en el segundo cuadro el pivote es la fila en donde la variable tiene el valor cero, y de aquí que el valor de la variable a introducir en el cuadro siguiente también será cero. Por lo tanto, el valor de la F. L. no cambiará cuando sustituyamos x_3 por x_2.

Este hecho puede producirnos alguna inquietud, ya que habíamos dicho que el M. S. debía terminar a causa de que el valor de la F. L. cambia en cada paso y ahora vemos que este cambio no ocurre. No podemos, por lo tanto, estar seguros de no repetir alguna sucesión de pasos una vez y otra vez.

En el caso de que nos ocupábamos esto podría no pasar si realizamos el cambio de x_3 y x_2 alcanzamos alguna vez la solución final. Los valores finales serán $x_2 = 0$, $x_1 = 2$, $x_5 = 3$. Señalamos que los valores no cero son los mismos que en el cuadro de la izquierda dado anteriormente. Esto sucede así porque hay solamente un punto en la figura V.5 que representa el menor valor de la F. L.

No debemos creer que vamos a entrar, al resolver un problema, en un dogal de este tipo pese a nuestros presentimientos. Se dice muy a menudo que la aparición de un ciclo es muy improbable. Esto es equivalente a decir que es muy difícil construir un ejemplo en donde ocurra la repetición de una serie de cuadros. Uno de tales ejemplos es debido a E. M. L. Beale (Ref. 2). Un ejemplo más antiguo que se ha conocido privadamente es debido a A. S. Hoffman.

12. Estos ejemplos indican que debemos ser cautos y hay que investigar, además, la posición. Esto es posible realizarlo gracias a una demostración debida a A. Charnes (Ref. 7 y 9).

En un diagrama de dos dimensiones, al que dos cocientes críticos sean iguales significa que hay más de dos variables cero, y de aquí que pasan más de dos líneas a través de algún punto. Una interpretación análoga pudo darse en espacios de mayor número de dimensiones. Ahora bien, los casos sencillos siempre sugieren algún remedio. La dificultad podría desaparecer si dislocásemos las líneas ligeramente, y una vez encontrada la solución volver a la situación anterior. Esta idea se puede dar analíticamente.

Supongamos un cuadro dado y reajustémosle sumando ciertos polinomios P_{u_s} a los Z_{u_s} como sigue:

	X_{um+k}	
X_{us}	$Z_{us0} + P_{us}$	$Z_{us\,um+k}$
FL	Z_{00}	$Z_{0\,um+k}$

Los polinomios se definen

$$P_{u_s} = \Sigma^{u_s} + Z_{u_s\,um+1}\,\Sigma^{um+1} + \dots + Z_{u_s\,un}\,\Sigma^{un}$$

Dicho con palabras los exponentes de las Σ en P_{u_s} son los subíndices de los v. n. b. y v_s. Sus coeficientes son los $Z_{u_s u_s 12}$ y $Z_{u_s u_s}$ ($=1$). Estos coeficientes se dan en el cuadro amplio (capítulo VI.7). El símbolo Σ indica un número pequeño y positivo, es decir, un número que es menor que cualquier otro con el que se puede comparar en el curso del cálculo. Así aseguramos que $Z_{u_s} + P_{u_s} > 0$ para todo s (incluso si $Z_{u_s} = 0$), volviendo a numerar las variables, de tal forma que las v. b. sean $x_1, \dots x_n$; es en el término Σ^u el que determina el signo de P_{u_k}.

Vamos a demostrar que este reajuste hace imposible que dos relaciones tales como, por ejemplo $(Z_{u_1 0} + P_{u_1}) / Z_{u_1 u_{m+1}}$ y $(Z_{u_2 0} + P_{u_2}) / Z_{u_2 u_{m+1}}$ sean iguales. Si la primera relación es mayor que la senguda, sin P_{u_1} y P_{u_2}, entonces la adición de estos dos polinomios no altera la relación, ya que las Σ no pueden hacer lo suficientemente pequeñas para que no causen efecto. Si los cocientes (sin los polinomios) son iguales, la magnitud relativa de los cocientes ajustados dependen en el cociente asociado de la potencia más pequeña de Σ. Las otras potencias tienen muy poca eficacia. Todos los cocientes asociados con potencias distintas de Σ no pueden ser iguales, ya que Σ^{u1} aparece solamente en la fila X_{u1} y Σ^{u2} en la X_{u2}. De esta forma el uso del cuadro ajustado hace posible la elección de una v. b. única, y el valor de la F. L. cambia en cada paso.

En nuestro ejemplo, las dos primeras columnas del cuadro primero y segundo son ahora

Primer cuadro:

$$\begin{array}{ll}
X_3 & 4 + 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \\
X_4 & 2 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \\
X_5 & 5 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^5 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Segundo cuadro:

$$\begin{array}{rll}
 & X_3 & 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 \\
-1 & X_1 & 2 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \\
 & X_5 & 3 + 3\varepsilon^2 - \varepsilon^4 + \varepsilon^5 \\
\hline
 & & -(2 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4)
\end{array}$$

En el primer cuadro la comparación decisiva es entre $-\dfrac{\varepsilon^2}{2}$ y $\dfrac{-2\varepsilon^2}{1}$ que da lugar a la sustitución de x_u por x_1. En el segundo cuadro el valor de x_3 no es cero, sino positivo. Las otras columnas son las mismas de antes (para el segundo cuadro tomamos el alternativo en el lado derecho. El tercer cuadro será ahora

$$\begin{array}{rllrr}
 & & & X_3 & X_4 \\
1 & X_2 & \varepsilon^2 + \varepsilon^3/_3 - 2\varepsilon^4/_3 & {}^1/_3 & -{}^2/_3 \\
-1 & X_1 & 2 + \varepsilon + 2\varepsilon^3/_3 - \varepsilon^4/_3 & {}^2/_3 & -{}^1/_3 \\
 & X_5 & 3 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 & -2 & 1 \\
\hline
 & & -2 - \varepsilon + \varepsilon_2 - \frac{}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\ \varepsilon_4 & -{}^1/_3 & -{}^1/_3
\end{array}$$

Este es el cuadro final podemos hacer ahora $\Sigma = 0$ y da la s. p. b. como antes.

No es necesario escribir todo esto como lo hemos hecho con objeto de dar claridad al razonamiento. Los coeficientes de las potencias de apareceen de forma clara en el cuadro ampliado y el procedimiento se puede describir como sigue:

Encontramos primeramente la columna de la variable que necesitamos hacer básica, por ejemplo $X_{u_{m+h}}$. Buscamos todos los valores positivos $Z_{u_s 1}/Z_{u\,u_{m+h}}$ y los comparamos. Si hay uno mínimo, hemos encontrado la nueva v. n. b. Pero si hay más de una v. b. que produce el valor mínimo, todas estas variables básicas están calificadas para ulterior consideración. Tomemos $Z_{u_s 1}/Z_{u_s o_{m+h}}$ para todas estas v. b. (estos cocientes no tienen necesariamente que ser positivos) y consideremos el más pequeño algebraicamente entre todos. Si hay varios, tomamos las variables correspondientes y contrastamos $Z_{u\,j}/Z_{u_s u_{m+h}}$ y así sucesivamente.

13. Puede ser interesante añadir algunas consideraciones al álgebra del caso considerado anteriormente. El hecho esencial es que obtenemos una s. p. b. $X_{u_1} \ldots X_{u_m}$ con algún valor cero para alguna de estas variables. Si, por ejemplo, $X_{u_1} = 0$, entonces

$$\begin{pmatrix} a_{u_1 1} & a_{u_{m-1} 1} & b_1 \\ a_{u_1 m} & a_{u_{m-1} m} & b_m \end{pmatrix} = 0$$

Si una matriz se construye de tal forma a partir de los coeficientes de m-1 variables y el lado derecho de las condiciones es singular, llamamos el problema de P. L. *degenerado.*

Algunos tratadistas hablan de degeneración en el caso de que alguna submatriz de orden *m* dé

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{n1} & b_1 \\ a_{1m} & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}$$

sea singular, incluso si esta submatriz está compuesta de a_{ij} solamente. Ahora bien si una matriz del último tipo, es decir

$$\begin{pmatrix} a_{u_1 1} & a_{u_m 1} \\ a_{u_1 m} & a_{u_m m} \end{pmatrix} = D_1$$

es singular, no podemos resolverlo para X_{u_i} y no podemos iniciar el M. S. con ella. En tales casos podemos demostrar que si hay una solución (no necesariamente posible), con $X_{u_{m+1}} = \dots = X_{u_n} = 0$ entonces una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{v_1 1} & a_{v_{m+1} 1} & b_1 \\ a_{v_{1m}} & a_{v_{m+1} m} & b_n \end{pmatrix} = D_2$$

es singular, con lo que para nuestros propósitos las dos definiciones de degeneración son equivalentes. La demostración es como sigue:

Sea $\sum_{i=1}^{n} a_{u_{ij}} X_{u_i} = b_j$ esto se cumple para $j = 1, \dots m$ si $D_1 = 0$.

Entonces podemos resolver el sistema

$$\sum_{i=1}^{m} a_{1 u_{ij}} \cdot W_i = 0 \quad j = 1 \dots m$$

De tal forma que una de las W_i por ejemplo X no será cero. Hagamos $\dfrac{X_{u\,r}}{W_t} = s$, tendremos que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{u_{ij}} (X_{u_i} - sw_i) = b_j$$

se verifica para toda j. Pero $x_{u_t} - sw_t = 0$ hay aquí a lo más $m - 1$ términos cero en el lado izquierdo de las ecuaciones y, por tanto, una matriz del tipo D_2 es también singular.

14. Otros varios tipos de procedimientos se han propuesto, algunos de los cuales pueden ser preferibles en ciertos casos. Así, por ejemplo, en el problema del transporte se ha encontrado que es posible introducir una ε de magnitud fija, el cual nos lleva a la obtención del valor final omitiendo los decimales con que aparece, esto debido a la particular elección de ε. Este método es muy conveniente en el cálculo automático, en donde es muy perturbador mantener el orden original de las variables (ver cap. XXII, nota al pie de la pág. 366 de la Ref. 15).

15. (1). Volvemos ahora al ejemplo 5 del capítulo V. Los cuadros son como siguen:

			x_1	x_2
			—1	1
	x_3	2	—2	1
	x_4	2	1*	—1
	x_5	5	1	1
		0	1	—1

		x_u		x_2
	x_3	6	2	—1
—1	x_1	2	1	—1
	x_5	3	—1	2
		—2	—1	0

El segundo cuadro muestra la solución final, pero tenemos un hecho nuevo: Z_{02} es cero. Esto no puede inducirnos a continuar el proceso, pero la F. L. puede no cambiar si introducimos x_2 en la base.

			x_4	x_r
	x_3	$7^1/_2$	$^3/_2$	$^1/_2$
—1	x_1	$3^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
1	x_2	$1^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$
		—2	—1	0

Podremos intercambiar x_5 t x_2 y así sucesivamente. Vemos que un cero entre las $Z_{o^u{}_{m+k}}$ indica que la s. p. b. final no es la única respuesta al problema. Considerando tales posibilidades, obtenemos todas las s. p. b.

Cuando tengamos dos s. p. b. cualquier combinación lineal de las mismas es también una s. p. aunque no básica. Geométricamente en nuestro ejemplo, todos los puntos de la recta entre $x_2 = x_4 = 0$ y $x_4 = x_5 = 0$ da el mismo valor mínimo a $x_2 - x_1$. Algebráicamente viene dado por los valores

$$x_1 = 2t + 3^1/_2 (1 - t) \,;\; x_2 = 1^1/_2 (1 - t) \,;\; x_3 = 6 + 17^1/_2 (1 - t;)$$
$$x_4 = 0;\; x_5 = 3t \quad 0 \leq t \leq 1$$

(1) Las x minúsculas tienen el mismo significado que las X mayúsculas.

16. Se puede añadir que, desde un punto de vista algebraico, la aparición de un $Z_{0u_{m+k}} = 0$ indica que hay algún u_s tal que

$$C_{u_{m+k}} = \sum_{s=1}^{m} C_{u_s} Z_{u_s 0_{m+k}}$$

Pero por definición tenemos

$$a_{u_{m+k}} j = \sum_{s=1}^{m} a_{u_s j} Z_{v_s u_{m+k}} \qquad j = 1, \dots m$$

(Capítulo VI, fórmula [3])

y estas relaciones indican que los vértices

$$(c_i, a_{i1}, \dots a_{im})$$

con $c = u_1 \dots u_m, u_{m+k}$ no son independientes.

Esto puede comprenderse facilmente partiendo de nuestra representación gráfica (Cap. V). Significa que la F. L. es constante en una de las rectas definidas por las restricciones. Veremos también que la condición es necesaria, pero no suficiente, para que exista una infinidad de soluciones.

CAPITULO VIII

DUALIDAD

Consideremos los dos esquemas siguientes:

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} X_i = b_j \qquad\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{N+j} + y_i = c_i$$

todas las x_i no-negativas $\qquad$ $y_1, \dots y_N$ no-negativas

ninguna restricción en el signo de y_{N+j}

$$\text{Minimizar } \sum_{1}^{N} c_i X_i = C \qquad\qquad \text{Maximizar } \sum_{1}^{m} b_j y_{N+j} = B$$

En la izquierda tenemos el problema familiar de P. L. con m ecuaciones de condición sobre N variables. En la derecha hay N ecuaciones en $N + m$ variables, de las cuales N tiene restricción en el signo mientras que las otras m no. Llamamos a este par conjunto dual de ecuaciones.

Elegimos ahora m variables x_{u_s} para las cuales puedan solucionarse las ecuaciones. Expresamos también C en términos de las variables restantes $X_{u_{m+k}}$ $(k = 1 \ldots N - m = n)$. Esto conduce a

$$X_{u_s} = Z_{u_s 0} - \sum_{k=1}^{n} Z_{u_s u_{m+k}} X_{u_{m+k}}$$

$$C = Z_{0\,0} - \sum_{k=1}^{n} Z_{0\,u_{m+k}} X_{u_{m+k}}$$

Volviendo al sistema en y, eliminamos las y_{N+j} resolviendo primeramente las m ecuaciones con C_{u_s} en el lado derecho (lo que es posible por la elección de las u_s).

Obtenemos

$$y_{N+j} = \sum_{s=1}^{m} (C_{u_s} - y_{u_s})\, d_j\,,$$

Sustituímos entonces en las ecuaciones restantes y tenemos

$$y_{u_{m+k}} = C_{u_{m+k}} - \sum_{j=1}^{m} a_{u_{m+k}}\, j\, y_{N+j} =$$

$$= - Z_{0\,u_{m+k}} + \sum_{s=1}^{m} Z_{u_s u_{m+k}} y_{u_s}$$

$$B = \sum_{s=1}^{m} (C_{u_s} - y_{u_s})\, Z_{u_s 0} = Z_{0\,0} - \sum_{s=1}^{m} Z_{u_s 0}\, y_{u_s}$$

Todas las y_{u_s} $(s = 1, \ldots m)$ e $y_{u_{m+k}}$ $(k = 1, \ldots n)$ tienen, por consiguiente restricción en el signo.

2. Con el siguiente cambio de notación tendremos:

antiguas	nuevas	antiguas	nuevas
k	i	s	j
$X_{u_{m+k}}$	X_i	y_{u_s}	y_{n+j}
$Z_{u_s 0}$	$-b_j$	$C - Z_{0\,0}$	C
$Z_{u_s u_{m+k}}$	$-a_{ij}$	$B - Z_{0\,0}$	B
$Z_{0\, u_{m+k}}$	$-c_i$		

y recordando $X_{u_s} \geq 0$ e $y_{u_{m+k}} \geq 0$ podemos escribir (x) e (y) como sigue

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i \geq b_j \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, y_{n+j} \leq c_i$$

$$\text{Minimizar } C = \sum_i c_i X_i \qquad \text{Maximizar } B = \sum_j b_j\, y_{n+j}$$

Los dos grupos de esta forma se llaman "conjuntos duales de desigualdades". Son equivalentes a conjuntos duales de ecuaciones siempre que exista una s. p. b. del último, en virtud de la cual puede solucionarse el sistema; esto es siempre posible ampliando el sistema por el método M, si fuese necesario.

Comparando los dos grupos de desigualdades, encontramos que el número de variables en un esquema es igual al número de desigualdades en el otro. Las dos matrices son traspuestas unas de otras y las constantes de la parte derecha de cada esquema son las de la F. L. del otro. También advertimos que minimizamos la F. L. de aquel esquema en que el miembro de la izquierda es mayor que el de la derecha y maximizamos cuando ocurre lo contrario. En este libro indicamos la F. L. que hay que minimizar por C (coste) y a F. L. que hay que maximizar por B (beneficio).

El par anteriormente citado es una forma ligeramente generalizada de lo que ocurre en la teoría de los juegos (en III.4) ya que las constantes de la derecha, al igual que los coeficientes de la F. L. eran 1. En cualquier caso, los resultados que se aplican a los conjuntos duales conducirán a resultados en la teoría de los juegos y utilizaremos esta idea para deducir todavía otra prueba del T. M. M.

3. Para comparar los resultados en los dos conjuntos, los escribimos en nuestra ya familiar tabla, recogiendo nuevamente todas las variables en un lado de las ecuaciones (x) e (y).

	$\underline{X_{u_{m+k}}}$				$\underline{y_{u_s}}$
$\underline{X_{u_s}}$	$Z_{u_s 0}$	$-Z_{u_s u_{m+k}}$	$\underline{y_{u_{m+k}}}$	$-Z_{0 u_{m+k}}$	$Z_{u_s u_{m+k}}$
$\underline{C}$	Z_{00}	$Z_{0 u_{m+k}}$	$\underline{B}$	Z_{00}	$Z_{u_s 0}$

La semejanza de estos dos cuadros es evidente. Los subíndices de las filas de X son los de las columnas de y y viceversa. Las cantidades en la primera columna del cuadro X son de la última fila del cuadro y, mientras que las columnas restantes de la primera contienen las cantidades de las filas restantes de la última, pero con signo cambiado. El hecho más importante, sin embargo, es que con las variables X e y elegidas de forma que se correspondan, los valores de B y C son iguales.

Cuando el conjunto de las X_{u_s} cambia, el de las $y_{u_{m+k}}$ cambia simultáneamente, de tal forma que la relación entre los cuadros permanece inalterada y, en particular, los nuevos valores B y C son iguales.

Las reglas para transformar el cuadro y, pueden deducirse de las de dual; alternativamente, podemos argüir que las reglas simplemente expresan el proceso de eliminación de una variable de la base e introducción de otra, y que reglas idénticas pueden aplicarse a ambos cuadros. Ambos argumentos llegan al mismo resultado. Esto es debido al hecho de que cada uno de ellos conduce a una de las descripciones alternativas del nuevo cuadro de VI-4, que describe, en realidad, las mismas relaciones.

Supongamos que hemos descubierto las s. b. óptimas para la maximización del problema. $-Z_{0 u_{m+k}}$ será entonces positiva o cero y así será $Z_{u_s 0}$. Volvamos ahora al problema de minimización, Dado que $Z_{u_s 0}$ son no-negativas, las X_{u_s} tienen el signo correcto y como $Z_{0 u_{m+k}}$ son no-positivas, hemos logrado alcanzar el último cuadro. En consecuencia, máximo de B es igual al mínimo de C.

Hemos demostrado así el Teorema Fundamental de Dualidad (T. F. D.) de la P. L., que es como sigue:

Dados dos conjuntos duales, y siempre que existe un valor mínimo (máximo) finito de C (B) existe también un valor máximo (mínimo) de B (C) y los dos óptimos son iguales.

Si tenemos ahora un s. p, b, óptima, podemos utilizar las restricciones para expresar los valores de las correspondientes v. b. como combinaciones lineales de las b_j. Podemos entonces sustituir estas expresiones de X_{u_s} en la expresión para C y reagrupar el resultado como una función lineal de b_j. Se sigue de T. F. D que los coeficientes de b_j en esta función son los valores de las variables básicas en las correspondientes s. p. b. óptimas correspondientes del problema dual. Esto se llama el principio de reagrupación en la Ref. 8 y 10 a.

Dado que el problema de los juegos es un caso especial del problema de la P. L. hemos dado también una nueva demostración del T. M. M.

4. Antes de continuar estudiamos algunos hechos algebraicos. De los dos conjuntos duales de desigualdades tenemos

$$\sum_j b_j y_{n+j} \leqq \sum_i \sum_j a_{ij} X_i y_{n+j} \leqq \sum_i C_i X_i$$

El T. F. D. nos dice incluso más, es decir, que

$$\sum_j b_j y_{n+j} = \Sigma C_i X_i$$

De aquí que las soluciones de los dos problemas dobles satisfagan también

$$\sum_j b_j y_{n+j} \geqq \sum_i C_i X_i$$

que es una formulación más amplia de la ecuación anterior. Se sigue que la solución del grupo siguiente de desigualdades sin exigencias de optimación, es equivalente a las s. p. óptimas de ambos pares de conjuntos duales

$$\sum_i a_{ij} X_i \geqq b_j \qquad i = 1, \dots n$$

$$\sum_i a_{ij} y_{n+j} \leqq C_i \qquad j = 1, \dots m$$

$$\sum_j b_j y_{n+j} \geqq \sum_i C_i X_i$$

$$X_i \geqq 0 \quad y_{n+j} \geqq 0$$

El último resultado arroja cierta luz sobre la cuestión de la conversión de un problema de P. L en un problema de juegos. Esta es una cuestión que es razonable plantear, ya que sabemos que la conversión opuesta es siempre posible.

Consideremos definido el juego por la siguiente matriz de pagos

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & -a_{11} & -a_{n1} & b_1 \\
0 & 0 & -a_{1m} & -a_{nm} & b_m \\
a_{11} & a_{1m} & 0 & 0 & -c_1 \\
a_{n1} & a_{nm} & 0 & 0 & -c_n \\
-b_1 & -b_m & c_1 & c_n & 0
\end{array}$$

Dada la forma de la matriz el valor del juego es por consiguiente cero (V el fin del cap. I). Convirtiéndolo en un problema de P. L. tenemos:

$$\begin{cases}
a_{1j} X^1_1 + \dots + a_{nj} X^1_n - b_j z \geqq V \text{ para todo } j \\
-a_{i1} y^1_{n+1} \dots - a_{im} y^1_{m+n} + c_i z \geqq V \quad \text{"} \quad \text{"} \quad i \\
\sum_j b_j y^1_{n+j} - \sum_i c_i X^1_i \geqq V \\
\sum_j y^1_{n+j} + \sum_i X^1_i + z = 1 \\
X^1_i \geqq 0 \; y^1_{n+j} \geqq 0
\end{cases}$$

obtener el máximo de V.

El máximo de V es ahora cero y podemos, por tanto, reemplazar V por cero en los términos a la derecha de las desigualdades.

Sabemos también que un juego tiene siempre una solución. Si este juego tiene una solución con $Z \leq 0$ dividimos entonces las desigualdades por Z y $X'_i/Z = X_i$ y $y'_{n+i}/Z = y_{n+j}$ es una solución de [1], por tanto, de los conjuntos duales. (Cf. Rf, 15 Cap. XX, por G. B. DANTZIG). Por el contrario, si X_i e y_{n+j} son valores óptimos finitos de las variables de un problema de P. L. y de su dual, entonces

$$\left(\frac{X_i}{\sum_i X_i + \sum_j y_{n+j} + 1}, \frac{y_{n+i}}{\sum_i X_i + \sum_j y_{n+j} + 1}, \frac{1}{\sum_i X_i + \sum_j y_{n+j} + 1} \right)$$

es una estrategia óptima del juego definido anteriormente.

En consecuencia, si el problema de P. L. (y de su dual) tiene un s. p. óptima finito, entonces el juego tiene por lo menos una solución tal que $Z \neq 0$. (Como un ejemplo donde el juego tiene una solución con $Z = 0$ y otras con $Z \neq 0$ hay que considerar el problema de la P. L. $-X_2 > 0$ $X_1 + X_2 = 1$ obtienen el mínimo de X_1).

5. En la demostración de T. F. D. se suponía la existencia de S. P. óptima finita de uno de los grupos, deduciéndose la existencia de S. P. óptima finita en el otro. Pero debemos investigar también las circunstancias en que estos dos conjuntos finitos existen.

Llegaríamos a la conclusión de que B no está acotado superiormente si tuviésemos una $Z_{u_s 0}$ negativa para algún u_s y simultánea todas las $-Z_{u_s u_{m+k}}$ para aquel u_s fuesen negativas o cero. Al mismo tiempo, en el cuadro $-X$ encontraríamos que el valor de X_{u_s} era negativo, pero todos los otros valores en aquella fila, positivas o cero. Entonces la información contenida en la fila X_{u_s} podría expresarse así:

$$x_{u_s} + \sum_{k+1}^{n} Z_{u_s u_{m+k}} X_{u_{m+k}} = Z_{u_s 0}$$

Los términos de la izquierda son positivos o cero, y los de la derecha negativos. De aquí que si el conjunto y tiene una F. L. ilimitada entonces el conjunto dual X es contradictorio; puede demostrarse de la misma forma que los papeles de X e y en este razonamiento pueden invertirse. (Esto no implica que si un sistema es contradictorio su dual tenga una F. L. ilimitada; puede también ser contradictoria.)

Tomando, por ejemplo (1),

$$x_1 - x_2 \geq 2, \quad -x_1 + x_2 \geq -1, \quad C = x_1 - 2x_2$$

y su dual

$$y_1 - y_2 \leq 1, \quad -y_1 + y_2 \leq -2, \quad B = 2y_1 - y_2$$

6. Imaginamos ahora un conjunto de un par dual de conjuntos, se ataca por el M. S. y que el otro grupo es tratado con el paralelo, tal como hemos hecho en la demostración T. F. D. Si nos fijamos entonces en el proceso para el segundo grupo, obtenemos un nuevo método para la solución del problema de la P. L. debido a C. E. LEMKE (Ref. 18). Llamamos al nuevo método el Método Dual del Simplex (M. D. S.).

Las reglas del M. D. S. pueden describirse como sigue (hablamos como hemos hecho hasta ahora de un cuadro $-x$ cuando la F. L. se minimiza, y del cuadro y cuando se maximiza):

Partiendo de un cuadro

$$\begin{matrix} X \\ y \end{matrix} \quad \text{donde todas las} \quad \begin{matrix} Z_{0\,u_{m+k}} \\ Z_{u_s\,0} \end{matrix} \quad \text{son} \quad \begin{matrix} \text{no-positivas} \\ \text{no-negativas} \end{matrix}$$

si las $\begin{pmatrix} Z_{u_s\,0} \\ -Z_{0\,u_{m+k}} \end{pmatrix}$ son todas positivas o cero, entonces hemos terminado. Si no, debemos encontrar un v. b. y una v. n. b. para intercambiarlas. La elección de éstas puede deducirse del cuadro dual, que suponemos que se está tratando por M. S.

M. D. S.	M. S.
Decidir qué variable hay que eliminar eligiendo cualquiera con negativo $\begin{pmatrix} Z_{u_s\,0} \\ -Z_{0\,u_{m+k}} \end{pmatrix}$	Decidir qué variable introducir eligiendo cualquiera $\begin{pmatrix} y_{u_s} \\ X_{u_{m+k}} \end{pmatrix}$ con un $\begin{pmatrix} \text{negativo } Z_{u_s\,0} \\ \text{positivo } Z_{0\,u_{m+k}} \end{pmatrix}$

(1) Las x en el ejemplo juegan el mismo papel que X.

M. D. S.

Consideremos que se elige la fila de $\begin{pmatrix} X_{u_r} \\ y_{u_{m+h}} \end{pmatrix}$. Consideramos todas las $\begin{pmatrix} \text{negativas } Z_{u_r u_{m+k}} \\ \text{positivas } Z_{u_s u_{m+h}} \end{pmatrix}$ y dividir entonces por

$$\begin{pmatrix} Z_{0 u_{m+k}} \\ Z_{u_s 0} \end{pmatrix}$$

Tomar la razón más pequeña (que sea positiva) determinando así la $\begin{pmatrix} X_{u_{m+h}} \\ y_{u_t} \end{pmatrix}$ que hay que introducir.

M. S.

Consideremos que se elige la columna de $\begin{pmatrix} y_{u_t} \\ x_{u_{m+h}} \end{pmatrix}$. Consideremos todas las positivas

$$\begin{pmatrix} -Z_{u_r u_{m+h}} \\ Z_{u_s u_{m+h}} \end{pmatrix}$$

y dividirlas por $\begin{pmatrix} -Z_{0 u_{m+k}} \\ Z_{u_s 0} \end{pmatrix}$

Tomar la razón más pequeña (que será positiva) determinando la $\begin{pmatrix} y_{u_{m+h}} \\ X_{u_r} \end{pmatrix}$ que hay que eliminar.

En el curso de estos pasos, el valor de la F. L. $\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \text{aumentará} \\ \text{decrecerá} \end{pmatrix}$ dado que permanece igual al correspondiente $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ del cuadro dual. Esto parece ser moverse en una dirección equivocada, pero se explica por el hecho de que un signo negativo de una v. b. indica que hemos logrado un valor de la F. L. que ha sobrepasado la marca y no es útil para una s. b.

Cuando se han determinado las variables que han de intercambiarse construímos el próximo cuadro mediante las reglas familiares de transformación.

7. Por consiguiente el M. D. S. tiene también sus complicaciones duales de las resueltas en el cap. VII. Podemos hacerlas frente siguiendo el mismo camino con que vencimos las dificultades en el M. S.

a) ¿Cómo podemos comenzar?

En el M. S. utilizábamos una versión del método M con una variable artificial (VII, 6) y aquí desarrollaremos el dual de aquel procedimiento.

Supongamos que lo resolvemos para m variables y expresamos también la F. L. en términos de v. n. b. $X_{u_{m+k}}$ $(k = 1, \ldots n)$. Si todos los coeficientes en la F. L. tienen el signo correcto, entonces procedemos utilizando el M. D. S. sin ninguna dificultad, pero si hay signos falsos en la F. L., asociada con $X_{i_1} \ldots X_{i_g}$ entonces introducimos una ecuación artificial

$$X_{i_1} + \ldots + X_{i_g} + X_0 = M$$

De todos los coeficientes con signo malo, elegimos aquellos con mayor valor absoluto. Consideremos que éste es d_{i_j}, es decir, el coeficiente de X_{i_j}. Tomando entonces X_i como otra v. b. solucionamos la ecuación artificial para ella y la sustituímos en las condiciones y en la F. L. La variable x_{i_j} desaparecerá de la última y todos los coeficientes tendrán el signo deseado.

Como aclaración tomamos el caso que es dual del ejemplo 2 del capítulo V (ver también VII.4 y figura V.2).

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & -2y_6 + 2y_7 + 5y_8 \\
\text{sujeto a} & -2y_6 + y_7 + y_8 + y_1 = -1 \\
 & y_6 - 2y_7 + y_8 + y_2 = 1 \\
 & y_6 + y_3 = 0 \\
 & y_7 + y_4 = 0 \\
 & y_8 + y_5 = 0
\end{array}$$

para y_1, y_2, y_3, y_4 e y_6 no negativas. Eliminando y_6, y_7 e y_8 tenemos

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & 2y_3 - 2y_4 - 5y_5 \\
\text{sujetas a} & 2y_3 - y_4 - y_5 + y_1 = -1 \\
 & -y_3 + 2y_4 - y_5 + y_2 = 1
\end{array}$$

con y_5 no negativa.

Añadimos la ecuación $y_3 + y_0 = M$ eliminando y_3 obteniendo:

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & 2M - 2y_0 - 2y_4 - 5y_5 \\
\text{sujeto a} & -2y_0 - y_4 - y_5 - y_1 = -1 - 2M \\
 & y_0 + 2y_4 - y_5 + y_2 = 1 + M \\
 & y_0 + y_3 = M
\end{array}$$

para y_5 no negativas.

Esto conduce a la siguiente sucesión de cuadros:

			M	y_0	y_4	y_5
				—2	—2	—5
	y_1	—1	—2	—2*	—1	—1
	y_2	1	1	1	2	—1
	y_3		1	1	0	0
			2	2	2	5

Tenemos una columna M, en lugar de la fila M. La variable artificial se está cambiando a la vez y no necesitamos considerarla en lo sucesivo. La secuencia del cuadro entonces es:

			y_1	y_4	y_5
				— 2	— 5
	y_2	1/2	1/2	3/2	—3/2
2	y_3	—1/2	1/2	—1/2*	—1/2
		— 1	1	1	4

			y_1	y_3	y_5
				2	— 5
	y_2	— 1	2	3	— 3*
—2	y_4	— 1	—1	—2	1
		— 2	2	2	3

			y_1	y_3	y_2
—5	y_5	1/3	—2/3	— 1	—1/3
—2	y_4	2/3	—1/3	— 1	1/3
		— 3	1	5	1

La comparación de los dos conjuntos duales de cuadros aclarará todas los hechos que hemos mencionado y el lector está ya preparado para desarrollar también los duales de los otros ejemplos del capítulo V.

8. En la última sección hemos solucionado el dual del ejemplo 2 del cap. V por el M. D. S. Podemos también resolver el ejemplo original 2 por el M. D. S. Añadimos $x_1 + x_0 = M$. La linea vertical marcada (0) en la fig. V.2 es una línea de ecuación $x_1 = M$, donde M es tan grande que la línea se encuentra fuera de todas las intersecciones de las otras líneas. Tenemos entonces el siguiente cuadro, que conduce, naturalmente, al mismo resultado final que el M. S. en el VII.4.

			M	X_2	X_0
				1	1
	X_3	-2	2	1	2
	X_4	2	-1	2	-1
	X_5	5	-1	1	-1
-1	X_1		1	0	1
			-1	1	-1

			M	X_4	X_0
					1
	X_3	-1	$^3/_2$	$^1/_2$	$^3/_2$
1	X_2	-1	$^1/_2$	$-^1/_2$	$^1/_2$
	X_5	6	$-^3/_2$	$^1/_2$	$-^3/_2$
-1	X_1		1	0	1
		-1	$-^1/_2$	$-^1/_2$	$-^1/_2$

De aquí que no necesitemos considerar más x_0.

			X_0	X_5
	X_3	5	1	1
1	X_2	1	$-^1/_3$	$^1/_3$
-1	X_1	4	$^1/_3$	$^2/_3$
		-3	$-^2/_3$	$-^1/_3$

Hemos conmenzado con $X_2 = X_0 = 0$ representado por el punto *e* en la figura v. 2. Está en el lado falso de $X_4 = 0$ y de $X_5 = 0$ de aquí el valor negativo de estas variables en el primer cuadro (recordad que M se ha inutilizado). Por otra parte, los coeficientes de la F. L. tienen ya el adecuado signo (negativo). Esto quiere decir que si aumentamos cualquiera de las v. n. b. cuyas líneas se encuentran en el punto *e*, es decir, si nos movemos sobre una de las dos líneas de intersección en una dirección no prohibida por el sombreamiento de la otra, nos movemos entonces fuera de la dirección en que la F. L. puede aumentarse. Esta dirección es, en realidad, aquella en la que debemos orientarnos, ya que, como sabemos, el valor de la variable que ha de introducirse en las bases cambia de cero a un valor positivo. Queda por decidir sobre cual de las dos líneas debemos movernos.

Queremos movernos fuera de una región sombreada, esto es, acotada; en este caso queremos eliminar X_4 o X_5 de las bases. Nos hemos decidido ya por X_4, de aquí que nos movamos hacia la línea $X_4 = 0$. Ahora si *b*, sobre esta línea, es un punto extremo, entonces *f*, también sobre esta línea, puede no serlo, porque la dirección de *b* a *f* es la opuesta de la de *f* a *b*. Así la línea y dirección en la que debemos movernos se definen unívocamente. Nos movemos a *f* y después a *c*. Aquí estamos, por fin, en un punto posible. El problema se ha solucionado.

(b) ¿Existe una solución acotada?

No hay nada aquí que no se haya dicho en el Cap. VII. Sabemos que la existencia de una solución no acotada es el dual de las condiciones contradictorias y dado que el método M proporciona un criterio para la última contingencia es natural que el dual del método M, que hemos discutido, sea una norma para determinar si la solución está acotada o no. Esto se discutió en VII. 10.

10 (c) ¿Qué variable debiera elegirse para su introducción en las bases?

El remedio, si hay un dilema, es nuevamente el dual del tratado en el capítulo VII para el caso correspondiente. No necesitamos considerar polinomios en ε porque podemos deducir la regla de la dada en VII. 12. La regla que se deduce es literalmente la misma que para el M. S., pero los valores descritos por el mismo símbolo están en diferentes posiciones en el correspondiente cuadro dual.

11. Finalmente, mencionamos que podemos, si lo deseamos utilizar una combinación del M. S. y M. D. S. para evitar el método M. Solucionamos primero las condiciones para *m* variables en términos de las otras, y expresamos la F. L. en términos de estas otras. Si los términos constantes en las condiciones son todos no-negativos, operamos con arreglo al M. S. Si los coeficientes en la

F. L. son todos de signos convenientes procedemos con arreglo al M. D. S. Si ninguna de estas cosas ocurre, sustituimos la F. L. por alguna otra F. L. con coeficientes de signo adecuado y solucionar el problema modificado por el M. D. S. Esto conducirá a una s. p. b. del problema original que puede entonces solucionarse por el M. S.

CAPITULO IX

LA SOLUCION DE LOS JUEGOS

En este capítulo aplicamos nuestro conocimiento de la P. L. a la solución de los juegos. Sabemos que cualquier juego puede considerarse un problema de P. L. (ver III.4) y la solución del último da también la del primero. Pero las características especiales del problema de los juegos permite un tratamiento especial, como veremos.

Hemos visto en el capítulo VIII que cada cuadro simple se refiere simultáneamente a dos problemas duales, y dado que los problemas de los dos jugadores en un juego bipersonal de suma-cero son duales en este sentido, podemos resolver ambos problemas simultáneamente y descubrir el valor del juego.

El problema de B puede adoptar la siguiente forma de P. L.:

$$y_1 + \dots + y_m = 1$$

$$a_{i1}\, y_1 + \dots + a_{im}\, y_m + y_{m+1} = v \qquad (i = 1, \dots n)$$

Minimizamos v para variables no-negativas.

La cantidad v no es una constante, pero podemos reducir las condiciones a una forma más familiar, que sin embargo difiere de la de III. 4.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las restricciones están ordenadas de tal forma que $a_{n1} \geq a_{i1}$ para todas las i. Sustracmos la segunda, ..., etc., ecuación de la última y expresamos la F. L. v por la última ecuación. Esto da

$$y_1 + \dots + y_m = 1$$

$$(a_{n1} - a_{i1})\, y_1 + \dots + (a_{nm} - a_{im})\, y_m + y_{n+m}\, y_{m+i} = 0$$

$$\text{pero } i = 1, \dots n - 1$$

Minimizamos

$$a_{n1}\, y_1 + \dots + a_{nm}\, y_m + y_{m+n}$$

Tenemos aquí n condiciones con $m + m$ variables. No hay ninguna dificultad para seleccionar la primera s. p. b.

Elegimos $y_1 = 1$, $y_{m+n} = a_{n1} - a_{1\,2}$, ... $y_{m+n-1} = a_{n1} - a_{n-1\,2}$

El valor de la F. L. entonces es a_{n1}.

Utilizando el M. M. I. tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} - a_{1\,2} & -1 & 0 & 0 \\ a_{n1} - a_{n-1\,2} & 0 & -1 & 0 \\ -a_{n1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puede facilmente comprobarse que la matriz inversa $(A)^{-1}$ es idéntica a la (A), excepto que en el ángulo base de la izquierda figura a_{n1} en lugar de $-a_{n1}$. Advertimos que las cantidades en la primera columna de $(A)^{-1}$ son precisamente los valores de las variables básicas y los de la F. L. Dado que la columna 0 de (M) contiene un 1 en la primera fila y solamente ceros en los demás lugares, la primera columna de $(A)^{-1}$ retendrá este significado.

Aclaramos todo esto por el siguiente juego, que se ha mencionado en 1. 3.:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz (M) es como sigue:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
1	1	1	1	0	0	0	0
0	4	2	—4	—1	0	1	0
0	1	5	—5	0	—1	1	0
0	—3	—3	3	0	0	—1	1

Partimos con la base y_1, y_n e y_5 y obtenemos la siguiente sucesión de cuadros (la columna de $Z_{u_s\,0}$ es idéntica a la primera columna y no la necesitamos repetir):

(y_1)	5/6	0	1/6	0	:	5/3			5/22
(y_4)	8/3	—1	4/3	0	:	22/3			—3/22
(y_3)	1/6	0	—1/6	0	:	—2/3			—1/11
	2	0	1	1	:	4			6/11
						4	—1	0	
						(x_2)	(x_5)	(x_6)	

(y_1)	5/22	5/22	—3/22	0	:			
(y_2)	4/11	—3/22	2/11	0	:			
(y_3)	9/22	—1/11	—1/22	0	:			
	6/11	6/11	3/11	1	:			
						—6/11	—3/11	—2/11
						(x_4)	(x_5)	(x_6)

Las Z_{0k} son todas negativas y por tanto hemos llegado al momento final.

Sabemos por VIII.1 (ecuaciones (x) e (y) que $-Z_{0\,u_{m+k}}$ es el valor de y_{m+k} en el conjunto dual, y así (6/11, 3/11, 2/11) es la estrategia óptima de A mientras que el valor del juego es 6/11. Se apreciará que con la anotación utilizada aquí solamente los valores finales de x_4, x_5 y x_6 y de y_1, y_2 e y_3 se refieren a estrategias, mientras que cualquiera de las variables adicionales, que hubieran permanecido en la solución final, tendrían que ignorarse desde este punto de vista.

2. Introduciremos ahora un método para solucionar un juego que es muy conveniente cuando la matriz de pagos es pequeña. Con-

sideramos los conjuntos duales de desigualdades tal como aparecen en un problema de juegos (ver III.4 y VIII.2) y elegimos la primera base integrada por aquellas variables adicionales que no aparecen en la F. L. Cuando en un momento posterior se introduce una variable no adicional en la base, esto ocurre en ambos conjuntos en los pasos correspondientes. Consecuentemente en la solución final aparecerá el mismo número de variables no adicionales en ambos cuadros finales.

Esto significa, en otras palabras, que el mismo número de variables adicionales tendrá eventualmente el valor cero para ambos jugadores. Consideramos que este número es r. Entonces hay en ambos grupos r ecuaciones en r variables no adicionales que definen las estrategias óptimas de ambos jugadores. Podemos suponer, sin perder generalidad, que las ecuaciones son las primeras r y que las variables son en la notación de III.4, $x'_1 \ldots x'_r$ e $y'_1 \ldots y'_r$.

Tenemos

$$\begin{aligned} a_{11} x'_1 + \ldots + a_{r1} x'_r - v &= 0 \\ a_{1r} x'_1 + \ldots + a_{rr} x'_r - v &= 0 \\ x'_1 + \ldots + x'_r &= 1 \end{aligned}$$

y análogamente, con a_{ij} traspuestas, para $y_1 \ldots y_r$.

La solución es:

$$x'_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{i-11} & 0 & a_{i+11} & a_{r1} & -1 \\ a_{1r} & a_{i-1r} & 0 & a_{i+1r} & a_{rr} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \div \begin{pmatrix} a_{11} & a_{r1} & -1 \\ a_{1r} & a_{rr} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y análogamente para y'_j

Cambiando la columna última y la i en el numerador encontramos que es igual a $\sum_i A_{ji}$, donde A_{ji} es el adjunto de a_{ij} en la determinante de a_{ij} $(i \,.\, j = 1, \ldots r)$. En vista de la última condición, el denominador debe ser $\sum_i \sum_j A_{ji}$. Tenemos también

$$v = \sum_i a_{ij} x'_i \text{ para cualquier } j \text{ y } v = \sum a_{ij} y'_j \text{ para cualquier } i$$

Ahora no sabemos qué submatriz de orden r de la matriz de pago conduce a la solución final. Debemos considerar todas las de órdenes, 1, 2, ..., min (m, n) y resolver las ecuaciones correspondientes como antes. Si algunas de las x'_i ó y'_j resultantes son negativas, entonces la submatriz que se refiere a este grupo es irrelevante para la solución del juego. Pero aún cuando sean no-negativas no es todavía suficiente. Las otras variables deben también ser no-negativas, lo que significa que las desigualdades de los tipos

$$a_{1r+t}\, x'_1 + \dots + a_{rr+t}\, x'_r \geq v = a_{11}\, x'_1 + \dots + a_{r1}\, x'_r$$
$$a_{r+s1}\, y'_1 + \dots + a_{r+sr}\, y'_r \leq v = a_{11}\, y'_1 + \dots + a_{1r}\, y'_r$$

deben mantenerse para todas las $t = 1, \dots n - r$ y $s = 1, \dots m - r$. Si se mantienen hemos logrado una solución. (La anotación es nuevamente la que es apropiada cuando las x'_i e y'_i son las primeras r de su conjunto.)

Un problema de juegos no puede tener una solución ilimitada, porque el problema dual tiene siempre una solución. De aquí que si descubrimos todas las s. p. b. del problema de P. L. se sigue entonces de lo deducido en VI.8 que todas las soluciones del problema de juegos dado son todas combinaciones lineales de aquellas soluciones que corresponden a las s. p. b. del problema de los juegos.

8. Aplicamos esta idea al juego

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para $r = 1$ la investigación para una solución significa simplemente encontrar un punto de silla.

En este juego no hay ninguno. Tomamos ahora todas las submatrices de orden 2, esto es

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La tercera es irrelevante, porque la segunda fila domina la primera y también la primera columna domina la segunda; así, el conjunto de ecuaciones $y'_1 + 3\, y'_2 = 3\, y'_1 + A\, y'_2$ o también el conjunto $x'_1 + 3\, x'_2 = 3\, x'_1 + 4\, x'_2$ no puede, posiblemente, tener valores no-negativos de todas las variables en su soluciones.

La primera matriz da $4\, x'_1 + 2\, x'_2 = x'_1 + 3\, x'_2$, $x'_1 + x'_2 = 1$, es decir, $x'_1 = {}^1/_4$ y $x'_2 = {}^3/_4$. De un modo análogo obtenemos

$y'_1 = y'_2 = {}^1/_2$. La desigualdad $3 \cdot {}^1/_4 + 4 \cdot {}^3/_4 \geq v = {}^5/_2$ se mantiene y hemos encontrado así una solución. Si tratamos de la misma forma la segunda matriz, obtenemos valores positivos, pero la desigualdad necesaria podría no aplicarse. Si A emplea nada más que los valores obtenidos en la segunda matriz, B podría estropear su juego eligiendo su segunda estrategia como réplica.

Aquí hay una solución única del juego.

CAPITULO X

REPRESENTACION GRAFICA DE LA P. L. (2)

Introducimos ahora un modelo geométrico que generaliza la representación dada en II.2 y las secciones siguientes. Consideramos el conjunto

$$a_{11}\, y_1 + \dots + a_{1m}\, y_m + y_{m+1} = c_1$$
$$a_{21}\, y_1 + \dots + a_{2m}\, y_m + y_{m+2} = c_2$$

Maximizamos $b_1\, y_1 + \dots + b_m\, y_m = B$ para variables no-negativas.

Suponemos que ninguna de las constantes c_i b_i es cero. En caso contrario, hacemos las modificaciones pertinentes. Dividiendo cada ecuación por sus miembros del lado derecho, introduciendo b_i, y_i como una nueva variable y definiendo nuevamente los coeficientes de un modo adecuado, el esquema puede plantearse en la siguiente forma: (las variables son diferentes de las primeras)

$$a_{11}\, y_1 + \dots + a_{1m}\, y_m + (1/C_1)\, y_{m+1} = 1$$
$$a_{21}\, y_1 + \dots + a_{2m}\, y_m + (1/C_2)\, y_{m+2} = 1$$
$$\text{Maximizar } y_1 + \dots + y_m = B$$

Las nuevas variables no se limitan necesariamente a valores no-negativos: las y_j que representaban una variable cuyo coeficiente b_j en la F. L. era negativo, se limitan ahora a valores *no-positivos*. Suponemos sin pérdida de generalidad que $y_1 \dots y_r$ son no-negativas y (si hay otras) $y_{r+1} \dots y_m$ son no-positivas. Las variables y_{m+1} e y_{m+2} son nuevamente no-negativas, ya que son las mismas que antes.

A partir de ahora, suponemos que B = 1. Como en el capítulo II, consideramos en un plano cartesiano los puntos P_j (a_{1j}, a_{2j}) para $j = 1, \ldots m + 2$.

Debemos demostrar cómo se determina là región de todos los puntos cuyas abcisas y ordenadas se deducen de las de P_j, aplicando a las mismas ponderaciones no-positivas o no-negativas y_i mientras B = 1.

Si todas las b_j fuesen positivas (no cero) y B = 1 entonces todos los puntos dados por los elementos situados a la izquierda de las condiciones están en la parte cápsula convexa de P_j. Si solamente son positivas algunas b_j, esto es, $b_1 \ldots, b_r$, podemos entonces con certeza alcanzar todos los puntos dentro de la cápsula convexa de $P_1 \ldots P_r$. Este área se extenderá por efecto de $y_{r+1}, \ldots y_{m+2}$ que analizaremos ahora. Consideramos las variables y_{m+1} e y_{m+2} que tienen coeficientes cero en la F. L. Cualquiera que sea su valor, el valor de la F. L. no quedará afectado, pero constituirán una adición a los elementos de la derecha de las condiciones, afectando cada una de ellas a uno de los dos elementos de la izquierda. Las dos ponderaciones y_{m+1} e y_{m+2} extenderán el área que hemos ya obtenido moviéndolo fuera del límite en las direcciones paralelas a las dos direcciones desde 0 a P_{m+1} y desde 0 a P_{m+2}, es decir, en la dirección en que se aumentan ordenadas y abcisas.

Volviendo ahora a una P_s con ponderaciones negativas atribuibles a ella y eligiendo una P_t arbitraria en el área obtenida, podemos extenderla en la dirección paralela a P_s cP_t.

Estas construcciones fallan cuando todas las b_j son negativas (lo que no ocurre en un problema de juegos). Pero entonces cambiamos el signo de todas las b_j y exigimos que B sea minimizada. Debemos recordar que el mínimo obtenido es entonces el negativo del máximo buscado originariamente.

Cuando hemos encontrado la región de todos los puntos cuyas coordenadas se definen por los dos elementos de la izquierda, mientras sea B = 1 cualquier área correspondiente a otros valores de B puede encontrarse por una dilatación o contracción similar del origen. Queremos que B sea lo mayor posible y tenemos el punto C = (1, 1) dentro de ella. Elegiremos una región lo dilatada que tolere la consistencia y que no tenga C fuera de ella (que puede por otra parte incluir alguna contracción del caso B = 1). Generalmente habremos situado entonces a C sobre un eje de la región entre dos vértices y entonces solamente dos y_j tendrán valores no-cero en la solución. En casos especiales, C podría coincidir con uno de los vértices del área o podría caer sobre dos líneas, conectando cada una de ellas dos puntos que se originaban de P_j.

Consideremos nuevamente el juego

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces el sistema

$$\begin{aligned} 4y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 &= 1 \\ 2y_2 + 3y_2 + 4y_3 + y_5 &= 1 \end{aligned}$$

En la fig. X.1 hemos trazado los puntos P_j y el punto C.

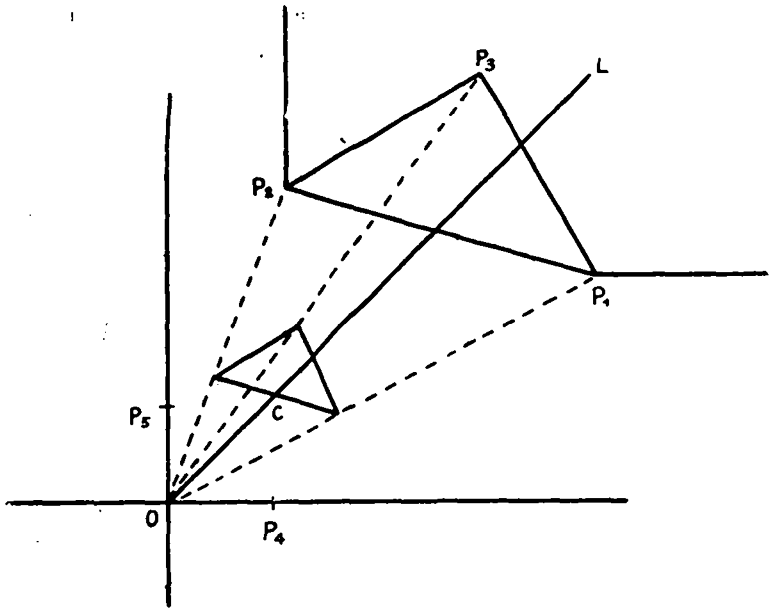

FIG. XI.1

En los problemas de juegos los puntos (1, 0) y (0, 1) estarán siempre entre las P_j.

El área que puede obtenerse por y_j no-negativas, mientras que $B = 1$ contiene ciertamente P_1 P_2 P_3, ya que de P_4 y P_5 este área puede extenderse trazando una vertical a través de P_2 hacia arriba y una horizontal a través de P_1 a la derecha. El área contiene todos los puntos a la izquierda y arriba de la línea quebrada consistente en la vertical de P_2 P_1 y de la horizontal. El punto c puede lograrse contrayendo el área hacia el origen en la proporción $1:5/2$, de donde $y_1 = y_2 = 1/5$ y $B = 2/5$. El problema equivalente de P. L. ha sido así resuelto. Volviendo al juego, dividimos por $2/5$ y obtenemos la estrategia mixta $(1/2, 1/2)$, mientras el valor del juego es el recíproco de $2/5$, esto es, $5/2$.

Es de utilidad hacer notar que a causa de la presencia de los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y su efecto sobre el área, el problema de los juegos tiene siempre una solución. Sin embargo, en un problema de P. L. es posible que la línea $0\,c$ no corte el área y que c no introduzca ninguna contracción o dilación en ella. Esto ocurrirá cuando las condiciones sean contradictorias. Puede también ocurrir que el área esté ilimitada en una forma tal que no exista ningún óptimo finito de la P. L.

Continuamos guiándonos por la demostración en el Cap. II y volvemos ahora al problema de A. En forma de P. L. puede expresarse:

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + 2\,x_2 &\geqq 1 \\ x_1 + 3\,x_2 &\geqq 1 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 &\geqq 1 \end{aligned}$$

Minimizamos $x_1 + x_2$ para variables no-negativas.

Este es un caso especial de desigualdades en dos variables, como sigue:

$$\begin{aligned} a_{1\,1}\,x_1 + a_{2\,1}\,x_2 &\geqq b_1 \\ a_{1\,m}\,x_1 + a_{2\,m}\,x_2 &\geqq b_2 \end{aligned}$$

Minimizamos $c_1\,x_1 + c_2\,x_2 = c$ para variables no negativas.

Suponemos nuevamente buscando la sencillez que ninguna de las c_i o b_j es cero. Este sistema puede también escribirse en la forma

$$\begin{aligned} a_{1\,1}\,x_1 + a_{2\,1}\,x_2 &\geqq 1 \qquad & a_{1\,j+1}\,x_1 + a_{2\,j+1}\,x_2 &\leqq 1 \\ a_{1\,j}\,x_1 + a_{2\,j}\,x_2 &\geqq 1 \qquad & a_{1\,m}\,x_1 + a_{2\,m}\,x_2 &\leqq 1 \end{aligned}$$

Minimizamos $x_1 + x_2 = C$.

Esta vez cualquiera x_1 o x_2 (o ambas) podrían ser no-positivas si c_1 o c_2 (o ambas) fuesen negativas.

En el caso de que nos ocupemos de dos ecuaciones con $m + 2$ variables, la última se interpretaría como ponderaciones y las $a_{1\,j}$ y $a_{2\,j}$ como coordenadas de los puntos. Ahora, cuando operamos con dos variables en m desigualdades, consideramos las variables como coeficientes en ecuaciones de líneas rectas en un plano con coordenadas a_1 y a_2.

Dada una línea recta S que pasa por el origen con ecuación $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$, trazada una línea paralela a S a través de P_j para cortar la línea L con ecuación $a_1 = a_2$ (recordemos que a_1 y a_2 son coordenadas). Designemos la intersección por Q. Entonces Q tiene la abscisa $(x_1 a_{1\,j} + x_2 a_{2\,j}) / x_1 + x_2$. (Comparad II.3.) En otras palabras, $x_1 a_{1\,j} + x_2 a_{2\,j}$ es la abscisa de un punto $\overline{Q}$ de L tal que $o\overline{Q}/oQ = x_1 + x_2$, en donde o es el origen. Esta referencia la consideraremos como lema.

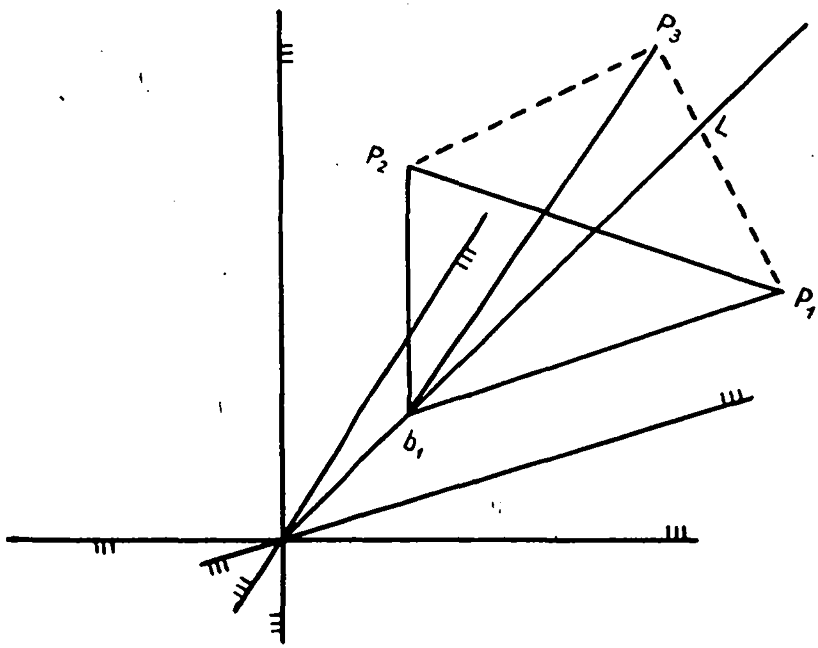

FIG. XI.2

Si el valor de la F. L. es 1, entonces $\overline{Q} = Q$. ¿Qué restricciones puede entonces imponer una desigualdad $x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} \geqq 1$ o $\leqq 1$ a x_1 y x_2 o mejor a la recta $x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0$ a través del origen? Por el lema cualquier línea como la anterior debe satisfacer la condición de que una paralela a través de P_j corte a L en un punto cuya abscisa es por lo menos (o a lo más) igual a 1. Sin embargo(si x_1 y x_2 deben ser no-negativos, o no-positivos, entonces únicamente líneas con pendientes negativas pueden considerarse. Si son de distinto signo las líneas pueden tener pendiente positiva.

Como ejemplo consideremos el juego anterior (fig. X-2). Hemos representado el punto b (1, 1) y, por el origen, paralelas a las líneas $b\,P_j$ (S = 1, 2, 3). Hemos marcado con líneas de puntos aquellos sectores dentro de los cuales las líneas no pueden volver. En este caso resulta que todas las líneas con pendientes negativas son admisibles siempre que C = 1. Pero queremos hacer C lo menor posible. Por lo tanto, tomando cualquier otro valor para C el punto

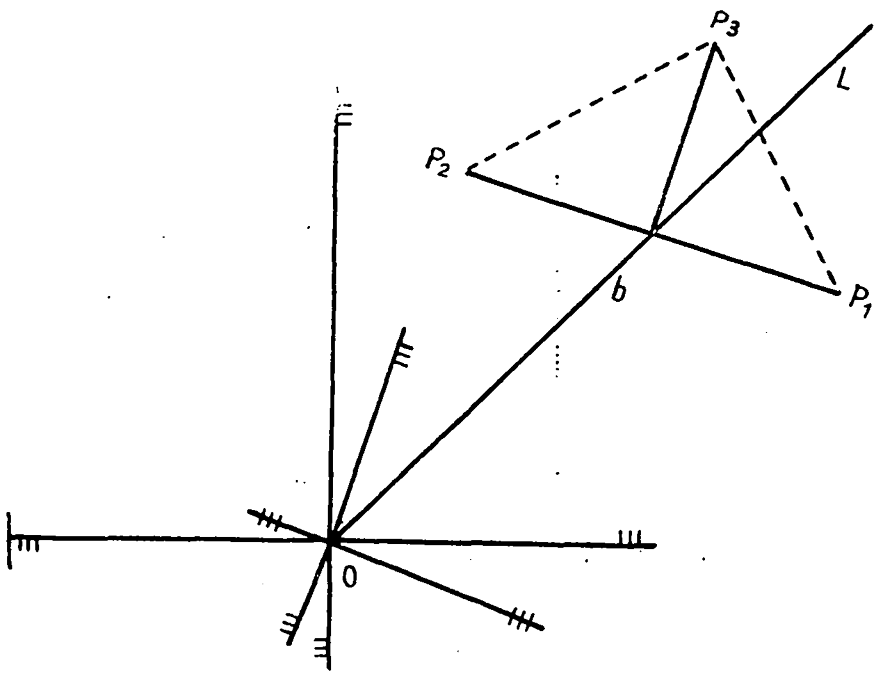

FIG. XI.3

que antes jugaba b lo jugará ahora un punto b (C) de L tal que las coordenadas de b (C) son iguales a 1/C. Cuando C aumenta, o disminuye, b (C) se mueve (o se separa) de 0 y las líneas a través de P_1 y b (C) se mueven en correspondencia, mientras los sectores cambian con ellas. Consideremos la situación cuando b (C) se ha movido a (5/2 . 5/2) (ver la figura X 3). Este punto es la intersección de L y la línea P_1 P_2; es evidente ahora que la paralela a P_1 b (C), que es también la paralela a P_2 b (C), no puede girar a ningún lado ni ir más lejos. No puede caer en ningún sector prohibido por la tercera paralela, y de aquí que hay una y una sola línea correcta. Su ecuación es $a_2 + 3\,a_2 = 0$. C igual a 2/5 y tendremos $x_1 = 1/10$ $x_2 = 3/10$. Se deduce que el valor del juego es 5/2 y las estrategias óptimas para A es (1/4, 3/4) como sabíamos.

CAPITULO XI

EL METODO DE LAS VARIABLES GUIAS

Un método que difiere de los explicados en los capítulos precedentes ha sido desarrollado por E. M. L. Beale (Ref. 1), y damos aquí un esbozo de él, pero debemos remitir al lector para más detalle a la publicación original. Suponemos que hay un sistema de m ecuaciones en n variables y que se quiere minimizar una F. L. para valores no-negativos de las variables. Resolvemos el sistema para m de las variables $x_1 \ldots x_m$ y obtenemos

$$x_j = z_{j0} + z_{j\,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + z_{jn}\, x_n \qquad (j = 1, \ldots m)$$

$$C = z_{00} + z_{0\,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + z_{0n}\, x_n$$

Esta transformación es posible, a menos que el sistema sea incompatible y no haya solución posible.

Podemos aún no estar seguros de que el sistema tenga solución con x_j no-negativas y los valores de C podrían estar no acotados inferiormente. Pero la última posibilidad puede excluirse añadiendo una condición supletoria con otra variable, es decir

$$1 = x_0 + w\,(x_{m+1} + \ldots + x_n)$$

donde w es finita y positiva y x_0 se limita también a valores no-negativos.

Si el sistema original tiene una solución finita, entonces siempre que w sea suficientemente pequeña, la introducción de esta nueva ecuación no afecta la respuesta final, porque no añade una restricción ulterior a los valores $x_{m+1} \ldots x_n$. Por otra parte, si el grupo original tiene solamente una solución infinita, se demostrará entonces por medio de alguna de las variables que están en la solución final que el orden de magnitud $1/w$ y x_0 será entonces cero. Si el sistema original no tiene solución el nuevo no la tendrá tampoco.

Tenemos ahora m ecuaciones con una variable en su miembro de la izquierda y una ecuación con 1 en el miembro izquierdo. Esto se mantendrá a través de los cálculos y llamaremos a la última ecuación la ecuación *guía*, y las variables que en ella aparecen variables *guías*. El método se llama método de las variables guías. (M. V. G.).

Nuestro proceso puede ahora describirse como sigue: imaginemos de ahora en adelante que solamente las variables guías necesitan ser no-negativas. Es fácil entonces encontrar la solución que minimiza C.

Consideramos que la ecuación guía es

$$1 = \sum_s t_s x_s$$

y

$$C = \sum_s T_s x_s$$

donde S se extiende a las $n - m + 1$ variables principales y donde t_s puede o no contener w.

Si t_s no es positiva, la ecuación guía no puede satisfacer para x_s no-negativas y el sistema total no tiene solución. Por otra parte, podemos tomar algunas x_s, que llamaremos x_p, de tal forma que t_p sea positiva y podemos utilizar la ecuación guía para eliminar esta variable de la expresión C. Se transforma entonces así:

$$C\, T_p/t_p + \sum_{s=0}^{n-m} (T_s - T_p\, t_s/t_p)\; x_s$$

Si todas las experiencias en los paréntesis de la derecha son no-negativas, entonces el conjunto $x_p = \dfrac{1}{t_p}$ y todas las otras $x_s = 0$ produce el mínimo de C para variables guías no-negativas. Algunas de las t_s pueden ser negativas o cero, pero primero tratamos de determinar que x_p hace no-negativos todos aquellos paréntesis en los que t_s son positivos. Con este fin debemos elegir p de forma que la razón T_p/t_p sea la más pequeña de todas las T_s/t_s para t_s positivas. Puede demostrarse que al principio esta elección de p asegura que todos los demás paréntesis son también no-negativos. Esto es así porque (*i*) en este paso C no puede ser un infinito negativo, en virtud de la introducción de w y (*ii*), si una de las expresiones en los paréntesis fuese negativa, podríamos hacer entonces C infinito negativo, lo que llevaría a una contradicción. (Para detalles véase Ref. 1). Llamamos a x_p variable *principal*.

Hasta ahora hemos ignorado la existencia de las ecuaciones no-principales. Contienen constantes, pero multiplicamos ahora éstas por x_0, cambiando así nuestro problema original. Sin embargo, esto no nos perturba, ya que puede demostrarse que la solución del nuevo problema puede transformarse en la del original sin una excesiva dificultad. Indicaremos cómo se puede abordar el nuevo problema.

Consideramos la ecuación guía y la expresión para C. Si la variable principal es x_p, la hacemos $1/t_p$ y todas las demás variables guías cero. Esto minimiza C en tanto en cuanto solamente las variables guías tienen signo restringido.

A continuación consideramos si esta elección de la variable principal conduce a valores no-negativos para variables no-guías. Esto depende de si los coeficientes z_{jp} ($j = 1, \ldots m$) son no-negativos. Si lo son, entonces hemos logrado nuestra meta, con variables guías como antes y variables no-guías $x_j = \dfrac{z_{jp}}{t_p}$. Pero si algunas son negativas, debe elegirse entonces un nuevo conjunto de variables guías eliminando x_p y eligiendo en su lugar una de aquellas x_j, por ejemplo, x_r, que inutiliza el primer resultado que era negativo. Procederemos solucionando la ecuación con x_r para x_p y sustituyendo en las demás ecuaciones. En la ecuación guía x_0 tendrá el coeficiente 1, si aparece, ya que los múltiplos de w pueden despreciarse por comparación.

Si no hemos logrado nuestra meta cuando determinamos la nueva variable principal, entonces debe repetirse el proceso de cambiar la ecuación principal. En la Ref. 1 se demuestra que durante el proceso el valor de C no disminuye y que el proceso puede terminarse. Esto depende del criterio para la elección de la variable principal análogo al método ε, ya que las relaciones desaparecen cuando se cambian las variables en el M. S. o en el M. D. S.

Incidentalmente, dado que C no está acotado inferiormente en el primer momento y después no disminuye, podemos en cada momento estar seguros de que si eliminamos la variable principal de la ecuación guía y de la expresión para C, la última aparecería siempre con coeficientes no-negativos, en otro caso, podríamos conseguir un valor infinitamente pequeño de C con variables guías no-negativas y esto contradeciría la tendencia a no disminuir de C.

Debemos ahora referirnos al problema de cómo trasladar la solución de nuestro problema cambiado el original. Aparte de los múltiplos de w el valor de x_0 puede ser en el momento final solamente 0 ó 1. Si es 1, entonces los dos problemas son idénticos. Pero si es 0, es necesario un análisis ulterior que no puede hacerse aquí. Puede decirse, sin embargo, que esta dificultad no surge si existe la solución al problema original y ésta es finita.

Apenas si es necesario mencionar que el M. V. G. puede adaptarse mediante cambios triviales al caso de una F. L. que se maximice.

2. El M. V. G. es independiente del M. D. S., pero ambos tienen algunas cosas similares. Aclaremos esto, resolviendo un ejemplo. La interpretación geométrica que se deduce entonces, sugiere que siempre es posible llevar a cabo los dos procesos en forma tal que el grupo de variables básicas en el M. D. S., en cada momento, es el mismo que el grupo de variables no guías más la variable principal en la M. V. G., y esto puede probarse formalmente. Tomamos el ejemplo 2 del capítulo V que ya consideramos en VII.4 y en VIII.7.

Las variables básicas naturales con que partimos son x_3, x_4 y x_5. En el M. D. S. hemos introducido x_1. En el presente caso, añadimos la ecuación guía que contiene x_0 y las variables x_1 y x_2 de tal forma que comenzamos con

$$\begin{cases} x_3 = -2x_0 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 2x_0 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 5x_0 - x_1 - x_2 \\ \mathrm{I} = x_0 + w(x_1 + x_2) \\ \mathrm{C} = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

La variable principal es x_1 y debe cambiarse con x_4

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0 - x_4 + 2x_2 \\ x_3 &= 2x_0 - 2x_4 + 3x_2 \\ x_5 &= 3x_0 + x_4 - 3x_2 \\ \mathrm{I} &= x_0 - w(x_4 + 3x_2) \\ \mathrm{C} &= -2x_0 + x_4 - x_2 \end{aligned}$$

La variable principal es x_2 y debe cambiarse con x_5

$$\begin{cases} x_2 = x_0 + x_4/3 - x_5/3 \\ x_1 = 4x_0 - x_4/3 - 2x_5/3 \\ x_3 = 5x_0 - x_4 - x_5 \\ \mathrm{I} = x_0 - w x_5 \\ \mathrm{C} = -3x_0 + 2x_4/3 + x_5/3 \end{cases}$$

La variable principal es x_0 y hemos logrado el conjunto final. Contiene la solución, es decir, $x_2 = 1$, $x_1 = 4$, $x_3 = 5$, $\mathrm{C} - 3$.

Es interesante examinar nuevamente la figura V.2 y ver lo que se ha hecho. La línea (0), que se trazaba en relación con el M. D. S., no es ahora importante y la línea que corresponde a la ecuación guía se marca con (0'). Hemos supuesto hasta ahora que w es suficientemente pequeño para que la nueva línea esté fuera de las intersecciones de las otras. Se ve fácilmente cómo podríamos modificar el M. V. G. o el M. D. S. Como para hacer que (0) y (0') coincidan.

Nuestras primeras variables guías eran x_0, x_1 y x_2 y minimizábamos C sometidas a estas no-negativas. Esto nos traería al punto e', que da todos los puntos en el triángulo formado por las líneas (0'), (1) y (2), produce el valor más pequeño de C. Estamos aquí a una distancia desde (1) y de aquí que x_1 sea la variable principal; estamos ahora en el lado no correcto de (4) y de aquí que x_4 deba hacerse guía.

Nuestra próxima posición es f' que de todos los puntos en el "triángulo" (0'), (2), (4) hace C más pequeño. Este triángulo está limitado por las tres líneas mencionadas, pero se apoyan sobre las líneas sin sombrear y es ilimitado, por tanto. En f' estamos a una distancia (2) de aquí que x_2 se transforme en la variable principal; debemos movernos ahora hacia el lado derecho de (5), de tal forma que x_5 se transforme en guía. Esto nos trae, finalmente, a C. Este punto se apoya sobre el triángulo (0'), (4), (5) sobre el lado derecho de todas las líneas e indica x_0 como variable principal.

VAJDA